GULIELMI OUGHTRED

# ÆTONENSIS,

Quondam Collegii Regalis in CANTABRIGIA Socii,

## CLAVIS MATHEMATICÆ DENUO LIMATA,

Sive potius

FABRICATA.

Cum aliis quibuſdam ejuſdem Commentationibus, quæ in ſequenti pagina recenſentur.

---

Editio Quinta auctior & emendatior.

---

Ex Recognitione D. *Johannis Wallis*, S.T.D. Geometriæ Profeſſoris Saviliani.

---

OXONIÆ:

Typis *Leon. Lichfield*: Impenſis *Tho. Leigh* ad Inſigne *Pavonis* juxta Eccleſiam S. *Dunſtani*, LOND. 1698.

E Libris G: Martin (R:
Coll: Cant:
Ex Dono G Blanchard
S/mod: Coll.

GULIELMUS OUGHTRED *Anglus* ex
Academia *Cantabrigiensi* An°. Ætat. 73. 1646

GULIELMI OUGHTRED

# ÆTONENSIS,

Quondam Collegii Regalis in CANTABRIGIA Socii,

## CLAVIS MATHEMATICÆ DENUO LIMATA,

Sive potius

FABRICATA.

Cum aliis quibuſdam ejuſdem Commentationibus, quæ in ſequenti pagina recenſentur.

---

Editio Quinta auctior & emendatior.

---

Ex Recognitione D. *Johannis Wallis*, S.T.D. Geometriæ Profeſſoris Saviliani.

---

OXONIÆ:

Typis *Leon. Lichfield:* Impenſis *Tho. Leigh* ad Inſigne *Pavonis* juxta Eccleſiam S. *Dunſtani*, LOND. 1698.

Erudito Juveni

D. *THOMÆ COOK*,

Ex Agro

DERBIENSI

ARMIGERO;

E *Collegio - Novo Oxoniæ*,

Superioris Ordinis

COMMENSALI;

*Animi, Corporis, & Fortunæ*

Dotibus Ornato;

Peregre Domique

RES MATHEMATICAS

Aliamque Literaturam edocto;

HANC

*D. OUGHTREDI Clavis*

Editionem, ex ſuo Typographéo

Prodeuntem,

Honoris & Obſervantiæ gratia,

*D. D. D.*

LEONARDUS LICHFIELD.

## *Ad Lectorem Præfatio, ab ipſo* OUGHTREDO *(tum vivo) Editioni Tertiæ præfixa.*

COnſcripſi olim in Familia illuſtriſſimi nuper Comitis *Arundeliæ* & *Surriæ*, cum ex filiis ejus alteri in diſciplinis Mathematicis exponendis deſervierim, ordinem quendam, qui mihi ad myſteria Mathematica videbatur appoſitiſſimus, ut ſtudioſorum, qui ipſum ſecuturi ſunt, animi ſcientiis illis, non leviter & ſuperficie tenùs tingantur, ſed intimè & radicitùs imbuantur. Hunc meum ordinem multorum virorum doctorum, maximè verò nobiliſſimi illius eruditiſſimìque D^ni *Caroli Cavendiſh* hortatu, in publicum ſub titulo *CLAVIS MATHEMATICÆ* primò emiſi. Tractatus quidem ille, non methodo (ſicut vulgò fit) Synthetica, per Theoremata atque Problemata longo verborum ambitu deſcriptus, ſed via inventionis Analytica, (ita ut totus ſit quaſi demonſtratio continua nexibus firmiſſimis compaginata) & non tam verbis quàm rerum ſpeciebus depictus, primo adſpectu difficultatem peperit in multis, qui forma tradendi inuſitata territi, Chimæram aut Sphyngem aliquam imaginabantur: Verùm ſiquis, præ-

judicii hæc terriculamenta adſpernatus, attente præſentique animo hanc viam ingrediatur, rem videbit maximè facilem & conſpicuam. Nam ſpecioſus hic atque ſymbolicus modus, nec memoriam verborum multiplicitate torquet, nec phantaſiam rerum multarum comparatione atque dijudicatione onerat ac diſtrahit; ſed operationis atque argumentationis totius proceſſum conſpectui repræſentans: Theorema denique profert, non uni tantum genti intelligendum, ſed omnium, quotquot ſunt ubique terrarum, nationum linguis (modò de notis conſtet) efferendum.

Animi quidem mei ſenſus & votum, tum in prima Clavis meæ formatione, tum in ſecunda limatione, ſive potius nova fabricatione, fuit, ut Matheſeos ſtudioſis quaſi Ariadnes filum porrigerem, quo ad intima harum ſcientiarum adyta deducantur, & ad optimos antiquiſſimòſque Authores *Euclidem*, *Archimedem*, *Apollonium Pergæum* magnum illum Geometram, *Diophantum*, ac reliquos, facilius penitiuſque intelligendos dirigantur; eorumque non propoſitiones modo addiſcant, quod pleriſque Mathematicis ſcientiæ quaſi culmen eſt & faſtigium; Sed etiam percipiant qua ſolertia, quibus æquationum, interpretationum, comparationum, reductionum, converſionum atque diſquiſitionum moliminibus priſci illi heroes ſcientiam hanc pulcherrimam ornaverint, auxerint, invenerint.

Mihi

Mihi quidem in illis legendis verſanti, & demonſtrationes ingenioſiſſimas ex incogitatis & inexpectatis, ſed divino quodam artificio conquiſitis, principiis adeò affabrè concinnatas animadvertenti admirantique ſtupor incidit, unde tanta exiſteret imaginationis vis, quæ tam immenſam conſequentiarum molem ſuſtinere poſſet, faceréque ut tot res, tam longe diſſitæ, animo ſimul obverſentur, & quaſi ultrò in argumenti unius ſtructuram coëant atque conſidant.

Quapropter ut ipſas res clariùs intuerer propoſitiones & demonſtrationes verborum integumentis exutas, brevibus tantùm ſymbolis ac notis, oculis etiam ipſis uno obtutu perſpiciendas deſignavi. Tum Theorematum affectiones varias in æqualitate, proportione, affinitate, atque dependentia, conferendo nova elicere tentavi. Denique quæſtiones conſimiles problematicè fingendo, eaſque quaſi jam confectas, via Analytica in ſua principia reſolvendo, rationes ac media, quibus conſtruantur inveſtigavi. Hinc tandem (non niſi plurimorum annorum uſu atque experientia) præceptorum illa qualiſcunque ſeges emerſit.

Non erat mihi animus, jam ad extremam ſenectutem appropinquanti, poſt *primam* hujuſce Clavis Editionem, in hanc iterum arenam prodiiſſe. Sed Venerabilis Vir Dn. *Sethus Ward*, Collegii Sidneienſis in Academia Cantabrigienſi tum Socius, nunc in Oxonienſi

Professor Astronomiæ Savilianus, Vir prudens, pius, ingenuus, nec Matheſi ſolùm, ſed & omni politioris literaturæ genere cultiſſimus, (qui primus Cantabrigiæ Clavis meæ uſum expoſuit,) mei videndi & cognoſcendi deſiderio, domi me latitantem longo itinere perquiſivit; cujus importuno hortatui, ut libellum illum ſub *ſecunda* lima correctiorem auctiorémque quorundam, ex multis quæ apud me erant, adjectione ederem, reſiſtendi facultas non erat. Acceſſit & alter hortator vehemens Dn. *Carolus Scarbrough* Doctor Medicinæ, ſuaviſſimis moribus, perſpicaciſſimóque ingenio Vir, cujus tanta eſt in Matheſi ſolertia, & ſupra fidem fælix tenaxque memoria, ut omnes Euclidis, Archimedis, aliorúmque nonnullorum ex antiquis propoſitiones & demonſtrationes recitare ordine & in uſum proferre potis ſit. Horum ego duorum judicio de meis lubens acquieſco. Ii enim ſunt quos celeberrímæ totius Europæ Academiæ, Mathematicarum aliarúmque artium humaniorum Profeſſores meritò amplexentur.

Quod autem a mendis illis Typographicis, quibus priores nimium ſcatebant, repurgata hæc *tertia* editio exhibeatur (quod in hujuſmodi ſcriptis maximi ſit momenti) curæ illud debetur Venerabilis Viri Dn. *Joannis Wallis*, Collegii Emanuelenſis Cantabrigiæ non ita pridem Alumni; deinde Collegii Reginalis ibidem Socii; nunc apud Oxonienſes Geometriæ Profeſſoris Saviliani; Viri ingenui, pii, in-

induſtrii, in omni reconditiore literatura verſatiſſimi, in rebus Mathematicis admodum perſpicacis, & in enodatione explicationeque Scriptorum intricatiſſimis *Zipherarum* involucris occultatorum (quod ingenii ſubtiliſſimi argumentum eſt) ad miraculum fælicis. Huic enim ille editioni adornandæ ultrò ſe offerens, & Calculi maximam partem examinavit, & operas perpetuo auxilio, atque aſſidua inſpectione adjuvit.

Denique non ſine piaculo omittam amantiſſimum mei Dn. *Robertum Wood* Collegii Lincolnienſis Socium, Philoſophiæ atque Medicinæ ſtudioſum, Virum optimum atque doctiſſimum, qui non calamo ſolùm & ſcriptorum examinatione, nequid fortè mihi in computationibus erroris exciderit, amicum præſtitit officium, ſed etiam bene maximam horum partem Anglicè non ita pridem edendam tranſtulit.

Partem autem illam quæ Geometricam Horologiorum Sciotericorum rationem tradit, ex Anglico idiomate in Latinum vertit Dn. *Chriſtophorus Wren*, Collegii Wadhamenſis Commenſalis Generoſus, Admirandi prorſus ingenio Juvenis, qui nondum ſexdecim annos natus, Aſtronomiam, Gnomonicam, Staticam, Mechanicam præclaris inventis auxit, ab eoque tempore continuo augere pergit; & revera is eſt à quo magna poſſumus (neque fruſtra) propediem exſpectare.

Huic

Huic Clavi Mathematicæ, poſt primam editionem, accedit, I, Affectarum quovis modo Æquationum in numeris luculenta reſolutio. II, Elementi Euclidis Decimi declaratio. III, Elementorum Euclidis Decimi tertii & Decimi quarti de Solidis Regularibus illuſtratio. IV, Sex Theorematum fundamentalium circa Anatociſmum inventio. V, Regulæ falſæ poſitionis demonſtratio Analytica. VI, Theorematum Archimedis de Sphæra & Cylindro declaratio. VII, Horologia Scioterica in Plano, Geometrica delineandi Methodus. Ultimò, inveniet etiam hîc lector Logiſticæ decimalis (quam præſexagenaria illa Mathematices ſtudioſis, præſertim in computationibus Aſtronomicis, commendatam eſſe cupio) regulas breves interſertas: una cum Multiplicationis & Diviſionis contractione admodum neceſſaria: Et Logarithmorum uſum, quantum ſatis eſt.

Horum ego pleraque cum ante plurimos annos, in gratiam & uſum nobiliſſimi eruditiſſimíque Domini *Gerardi* Domini *Aungier* Baronis de *Longford*, hominis vere pii atque Chriſtiani, doctíque non modò ſermonis utriuſque linguæ, ſed & Hebraicæ aliarúmque linguarum Orientalium, ac utriuſque philoſophiæ, & de me optimè meriti, ſcripſerim; jure eum ſuo reticendo fraudare pro piaculo duxerim. Is enim eſt, quo fautore atque Mœcenate gloriari pro ſummo honore habeam.

I. CLA-

## Index Capitum.

### I. CLAVIS MATHEMATICÆ.


Cap. I. *De Notatione.* Pag. 1
II. *De Additione.* 4
III. *De Subductione.* 5
IV. *De Multiplicatione.* 6
V. *De Diviſione.* 11
VI. *De Proportione.* 15
VII. *De maxima communi Menſura.* 23
VIII. *De Partibus, ſeu Numeris Fractis.* 25
IX. *De Additione & Subductione partium.* 26
X. *De Multiplicatione & Diviſione Partium.* 28
XI. *Exempla aliquot, quibus via ſternitur ad Æquationem Analyticam.* 30
XII. *Ad Geneſin & Analyſin Poteſtatum, quædam præmiſſa.* 34
XIII. *De Poteſtatum Geneſi.* 39
XIV. *De Poteſtatum Analyſi, ſive eductione Radicis.* 42
XV. *De Lateribus Surdis.* 45
XVI. *De Æquatione, & quæſtionibus per Æquationem ſolvendis.* 50
XVII. *De Æquationibus, alia.* 59
XVIII. *Penus Analytica.* 63
XIX. *Exempla Æquationis Analyticæ varia, pro Theorematibus inveniendis, & Problematibus ſolvendis.* 74


II. De

II. De Æquationibus Affectis Tractatus.

*Earum Resolutio, præceptis* 28, *tradita*, p. 110
*Exempla quædam Æquationum Resolutarum in Numeris.* 125
*Notæ in exempla præcedentia.* 143

III. Elementi Decimi Euclidis Declaratio. p. 1

IV. De Solidis Regularibus Tractatus. p. 21

V. De Anatocismo, sive Usura Composita. p. 40

VI. Regulæ Falsæ Positionis, Demonstratio. p. 43

VII. Theorematum Archimedis, de Sphæra & Cylindro, Declaratio. p. 1

VIII.

## Index Capitum.

# VIII. Horologiographia Geometrica.


Cap. I. *De Planis.* Pag. 1

II. *Linearum, quæ in deſcribendis Sciotericis præcipuè uſui ſunt, Declaratio.* 5

III. *Meridianæ, Subſtylaris, & Styli deſcriptio in Scioterico Horizontali.* 7

IV. *Earundem deſcriptio in Sciotericis directè Septentrionalibus vel Auſtralibus, tam Erectis quam Obliquis.* 8

V. *Earundem deſcriptio in Sciotericis Orientalibus & Occidentalibus Erectis.* 10

VI. *Earundem deſcriptio in Sciotericis Orientalibus & Occidentalibus, Inclinantibus aut Reclinantibus.* 11

VII. *Earundem deſcriptio in Sciotericis Auſtralibus aut Septentrionalibus Erectis, in Ortum aut Occaſum Declinantibus.* 15

VIII. *Earundem deſcriptio in Sciotericis Auſtralibus Declinantibus & Inclinantibus; vel in Septentrionalibus Declinantibus & Reclinantibus.* 21

XI. *Earundem deſcriptio in Sciotericis Auſtralibus Declinantibus & Reclinantibus; vel in Septentrionalibus Declinantibus & Inclinantibus.* 22

X. *Lineæ Contingentis, atque Æquinoctialis (cum ipſius Meridiana, & lineis Horariis) deſcriptio.* 33

XI. *Linearum Horariarum Sciotericì, deſcriptio.* 38


CLAVIS

CLAVIS

# CLAVIS MATHEMATICÆ *Denuo Limata.*

## CAP. I. *De Notatione.*

1. TAbella admodum utilis, non modò pro numerorum Notatione, quam primâ facie exhibet; ſed etiam in omni computatione per numeros tum communes, tum figuratos, tum artificiales, qui vulgò Logarithmi dicuntur.

| Integri. | | | | | | | Partes. | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9, &c. |
| M | MMM | | M | MMM | | | CXI | | | XC | MMM | | MMM | | M | | | |
| M | MMM | | C | X | I | | | | | | I | X | C | MMM | M | | | |
| M | C | X | I | | | | | | | | | | | I | X | C | M | |

2. In hâc tabellâ numeri ſuperiores ſunt Indices ſive exponentes terminorum utrinque ab unitate continuè proportionalium; affirmativi in integris, negativi in partibus. Eſtque progreſſio in decuplâ ratione verſus ſiniſtram, & in ſubdecupla verſus dextram; ſicut literæ numerales ſubſcriptæ oſtendunt.

Eſt igitur progreſſio ab unitate in integris, 1, 10, 100, 1000, 10000: Et in partibus, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$: Et ſic in infinitum.

3. Atque hoc modo in omni alia Progreſſione, terminis ab unitate quacunque ratione ſive creſcentibus, ſive decreſcentibus, Indices ſui erunt apponendi.

4. Tabellam quidem in decimali ratione ordinavi, tum ut numerorum quorumcunque (ſive Integri ſint, ſive partes, ſive mixti) valores per gradus & periodos æſtimentur: tum quia Logiſtica hæc decimalis ſexagenariâ, in computationibus Aſtronomicis, multo facilior eſt atque concinnior. Hoc planè perſpexit, quicunque is fuit, qui primus canonem Sinuum à ſemidiametro 60, ad 1 cum circulis annexis, revocavit. Utinam idem etiam in aliis canonibus fieret.

5. Partes decimales ſcribuntur in unâ lineâ cum integris, diſtinguuntur autem lineolâ rectangulari, quæ idcircò *ſeparatrix* dicitur. Et quemadmodum in integris, quilibet ab unitatum loco gradus augetur versùs ſiniſtram decuplando: ſic in partibus decimalibus, quilibet ab unitatum loco gradus minuitur verſus dextram ſubdecuplando.

6. Partes decimales denominationem ſuam ſortiuntur à loco figuræ ſuæ ultimæ: ut $0|\underline{5}$ ſunt 5 decimæ partes: $0|\underline{56}$ ſunt 56 centeſimæ partes: $0|\underline{056}$ ſunt 56 milleſimæ partes, & ſic de reliquis omnibus.

7. Cir-

7. Circuli ante integros, vel poſt partes decimales, nihil valent: at verò poſt integros, & ante partes decimales (hoc eſt, utrinque lineæ ſeparatrici proximi) vim ſuam retinent: nam gradus conſtituunt quibus figurarum valores cenſentur: ut 0005, ſignificant tantummodo 5: & 0|500, 5 ſunt decimæ partes.

8. Quare in partibus decimalibus ſcribendis, linea ſeparatrix ſemper apponatur; & loci, ſi qui ſunt, vacui, circulis ſuppleantur: ut 0|00005 ſunt 5 centies milleſimæ partes.

9. Signum addendi ſive affirmationis eſt + plus, ſive pl. ut 34, vel + 34.

10. Signum minuendi ſive negationis eſt — minus, ſive mi: ut — 34, negantur omnino eſſe.

11. Pertinet autem ſignum ad magnitudinem ſequentem, cui præfigitur. Et omnis magnitudo, cui non eſt præfixum ſignum negationis, intelligitur eſſe affirmata, & habere ſignum +, licet non ſit expreſſum.

12. Et nota quod ſignis + & -- utor, quando ſimplex magnitudo affirmatur vel negatur de ſimplice: ſignis autem pl. & mi. quando magnitudo compoſita affirmatur vel negatur de ſimplice, vel ſimplex de compoſita.

13. Magnitudines denotari poſſunt vel numeris menſuram ipſarum ſignificantibus, vel etiam ſpeciebus: ut linea longa ſeptem uncias, deſignatur vel per 7; vel per unam aliquam literam aut notam, A, B, C, &c; vel per

duas literas terminis lineæ adſcriptas, AB, BC, CD, &c. pro libitu: modò memoriâ teneas pro quâ magnitudine ſpecies quælibet ſtatuitur.

14. Specioſa hæc Arithmetica arti Analyticæ (per quam ex ſumptione quæſiti, tanquam noti, inveſtigatur quæſitum) multo accommodatior eſt, quam illa numeroſa. Nam in numerosâ, numeri à novo, quem proferunt, ita abſorbentur, ut penitus diſpareant, nec ullum ſui veſtigium relinquant: At in ſpeciosâ, permanent ſpecies ſine aliquâ mutatione, ſpecimen exhibentes totius operationis: unde non ſolum in quæſiti notitiam ducunt, ſed etiam Theorema generale pro ſolutione conſimilium quæſtionum, in aliis magnitudinibus datis, edocent.

## CAP. II. *De Additione.*

1. NUmerus inventus per Additionem, dicitur Summa, vel Aggregratum. Ut 3 & 7 conſtituunt 10.

2. Additio incipit ad dextram, & ſummas ſingulorum locorum particulares inventas ſubſcribit, in locis ſuis propriis.

3. In Additione omnes numeri dati ſimul æquantur Summæ.

Exempla

Exempla Additionis.

| | | l. | s. | d. |
|---|---|---|---|---|
| 79403 | 3794\|236 | 17 | 13 | 4 |
| 8956 | —584\|3 | 9 | 16 | 7 |
| 67293 | 947\|08 | 238 | 09 | 6 |
| 5087 | 4720\|7439 | 70 | 00 | 10 |
| 160739 | 48\|5 | 48 | 10 | 3 |
| | 10094\|8599 | 384 | 10 | 6 |

4. Additio ſpecioſa conjungit omnes magnitudines datas ſervatis ſignis.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ad | 3A | A | 5A | 3A | A |
| adde | A | --A | ---3A | ---5A | E |
| Sūma | 3A+A | A-A | 5A-3A | 3A-5A | A+E |
| hoc eſt | 4A | 0 | 2A | --2A | |

| | | |
|---|---|---|
| ad | A+B | A+B |
| adde | A-B | A-C |
| Summa | 2A | 2A+B--C |

Sic in Indicum Additione.

| | |
|---|---|
| 3 | 3 |
| 2 | 2 |
| 1 | 1 |

## CAP. III. *De Subductione.*

1. NUmerus inventus per Subductionem dicitur Reliquus, vel Differentia, vel Exceſſus. Ut è 7 tolle 3, reſtat 4.

2. Subductio incipit ad dextram, & differentias ſingulorum locorum particulares inventas ſubſcribit, in locis ſuis propriis.

3. In Subductione, numerus ſubducendus, unà cum differentia, æquatur numero ex quo.

Exempla Subductionis.

| | | | l. | s. | d. |
|---|---|---|---|---|---|
| 347206836 | 3794 | 236 | 17 | 13 | 4 |
| 6807592 | 947 | 68 | 9 | 16 | 7 |
| 340399244 | 2847 | 156 | 7 | 16 | 9 |

4. Subductio *ſpecioſa* conjungit utramque magnitudinem datam, mutatis omnibus ſignis magnitudinis ſubducendæ.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ex | 4A | 3A | 5A | A |
| tolle | A | 5A | -3A | E |
| Reſtat | 4A--A | 3A--5A | 5A+3A | A--E |
| hoc eſt | 3A | --2A | 8A | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ex | A | A | Sic in Indicum ſubductione. |
| tolle | B+C | B-C | |
| Reſtat | A-B-C | A-B+C | |

| | |
|---|---|
| 3 | 3 |
| 2 | 2 |
| 5 | 5 |

## CAP. IV. *De Multiplicatione.*

1. NUmerus inventus per Multiplicationem, dicitur Factus, vel Productus; vel Rectangulum, vel Planum. Nam unus è numeris propoſitis habetur pro longitudine, alter

alter pro latitudine: & numeri propoſiti dicuntur Factores atque Latera. Maxima quippe binarum magnitudinum poteſtas, eſt figura ex ipſis compoſita, cujus anguli ſunt recti, & latera parallela.

2. Multiplicatio incipit ad dextram, & ſingulas figuras unius numeri dati, in ſingulas alterius figuras ducit: & factos demum, habitâ locorum ratione, in unam ſummam colligit. Et ſi partes decimales numeris propoſitis ſint admixtæ, è toto facto tot locos linea ſeparatrice abſcindit, quot ſunt loci partium in utroque factore. Nam in Multiplicatione Index cujuſque particularis figuræ facti, invenitur addendo Indices figurarum multiplicatæ & multiplicantis. Sic 58|73 ductus in 600, facit 35238. Nam Index figuræ 6 in 600, eſt 2: & Index ultimæ figuræ 3 in 58|73 eſt $\overline{2}$. addantur Indices 2 & $\overline{2}$, extabit 0 pro Indice ultimæ figuræ facti 35238: quæ idcircò pertinet ad locum unitatum. Et conſimilis reliquarum figurarum in facto cenſura gradualis inſtitui poterit.

3. Si è numeris propoſitis, unus, vel uterque, adjunctos habeat ad dextram circulos: omiſſis circulis, fiat ipſorum numerorum Multiplicatio: & facto demum tot inſuper integrorum loci accenſeantur, quot ſint omiſſi circuli in utroque factore.

4. In Multiplicatione eſt, ut unitas, ad unum è factoribus: Sic alter è factoribus, ad factum. Ut ſi ducatur 4 in 6 fiet 24: Eſt igitur 1. 4 :: 6. 24: vel 1. 6 :: 4. 24. Ex-

Exempla Multiplicationis.

| | |
|---|---|
| 4576 | 580\|34 |
| 892 | 47\|5 |
| 9152 | 290170 |
| 41184 | 406238 |
| 36608 | 232136 |
| 4081792 | 27566\|150 |

| | | |
|---|---|---|
| | 358 | 58\|73 |
| | 600 | 600 |
| | 214800 | 35238 |

5. Contractio Multiplicationis, in Logiſtica valdè utilis, ſic eſt. Si inſtituto tuo ſufficiat habere factum non integrum, ſed multatum aliquot ex ultimis figuris: ſtatues unitatis locum minoris numeri, ſub illa figura majoris, cujus Index æqualis ſit numero figurarum, vel abſcindendarum in integris vel relinquendarum in partibus decimalibus: Et reliquas figuras minoris numeri, ſub numero majore ordine inde contrario. Tum in multiplicando incipies ubique ad illam figuram majoris numeri, quæ eſt ſupra eam figuram minoris, qua multiplicatur: habita tamen ratione incrementi, quod ex ſubſequentibus figuris majoris numeri ſuppeditatur. Hujus compendii caſus ſunt quatuor.

Caſus I. Si velis factum habere purum à partibus: Statues unitatis locum minoris ſub uni-

unitatis loco majoris. Ut in exemplo, ubi 246|914 ductus in 35|27 producit 8708 integros, abſciſſis omnibus partibus decimalibus.

246|914
72|53
7407
1235
49
17
8708

Caſus II. Si velis habere factum cum locis aliquot partium, puta quatuor: Statues unitatis locum minoris numeri ſub quarto loco partium majoris. Ut in priore exemplo, factus erit 8708|6568 mixtus cum quatuor locis partium.

246|914
72|53
74074200
12345700
493828
172840
8708|6568

Caſus III. Si velis factum multatum aliquot locis integrorum, puta quinque: ſtatues unitatis locum minoris numeri loco quinto ante unitatis locum majoris. Ut in exemplo, ubi 80902 ſinus graduum 54 multiplicandus eſt per 39875 ſinum maximæ declinationis 23° 30′: prodibit 32260 ſinus declinationis ſolis ad ♉ 24°.

80902
57893
24271
7281
647
57
4
32260

Caſus IV. Si velis factum multatum locis integrorum, puta quinque, reparari aliquot locis partium, puta quatuor. Quia 5—4=1: Statues unitatis locum minoris numeri uno loco ante unitatis locum majoris. Ut in exemplo ubi ſinus 42262 multiplicatur per 0|0064, ita ut abſciſſis à facto quinque figuris ultimis, reſtituantur quatuor loci partium: Factus erit 0|0027.

42262
4600|0
25
2
0|0027

6. Multiplicatio *ſpecioſa* connectit utramque magnitudinem propoſitam cum notâ *in* vel ×: vel plerumque abſque nota, ſi magnitudines denotentur unica litera. Et, ſi ſigna ſint ſimilia, producta magnitudo erit affirmata: ſin diverſa, negata. Effertur autem per *in*.

Et nota, quòd A in A, ſive A×A, ſive A A, eſt Aq. AAA ſive AqA, eſt Ac. AAAA, ſive AqAq, ſive AcA, eſt Aqq. AAAAA, ſive AcAq, ſive AqqA, eſt Aqc. AAAAAA, ſive AcAc, ſive AqqAq, ſive AqcA, eſt Acc, &c. Nam poteſtas quælibet ſuperior fit ex duabus inferioribus, quarum dimenſiones ſimul æquantur numero dimenſionum ſuperioris. Quot autem magnitudines ſunt quæ multiplicantur, totidem ſunt dimenſiones.

| Duc A in E | A+E B | A—E B | A+E+I Z | B+1 A |
|---|---|---|---|---|
| fiet AE | BA+BE | BA-BE | ZA+ZE+ZI | AB+A |

Duc

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Duc 3A | AE | AE | A+E | A+E |
| in 2A | A | AE | A+E | A--E |
| fiet 6Aq | AqE | AqEq | Aq+AE | Aq+AE |
| | | | +AE+Eq | ---AE |
| | | | Aq+2AE+Eq | ---Eq |
| | | | | Aq--Eq |

Ad hunc etiam modum Multiplicatio fiet ſi magnitudines conſtent binis literis. Ut ſi latus AB+CD multiplicandum ſit in ſe, producetur quadratum ABq+ 2AB×CD+CDq.

## CAP. V. *De Diviſione.*

1. NUmerus inventus per Diviſionem dicitur Quotus, vel etiam Parabola: quia oritur ex applicatione numeri plani ad longitudinem datam, ut inveniatur latitudo congrua. Et ſi numerus ad numerum applicetur cum lineolâ interjectâ, oſtendit quod numerus ille ſuperior dividendus ſit per inferiorem, ad quem applicatur: ut $\frac{12}{4}$ & $\frac{1}{3}$.

2. Diviſio incipit ad ſiniſtram: & poſtquam ex dividendo ſufficientem diviſori dividuum diſtinxerit, & ſub ipſo diviſorem ſubſcripſerit, vel ſaltem ſubſcriptum cogitaverit: ſingulas figuras diviſoris ex ſingulis ipſius dividui figuris ſupra ſtantibus, æqualiter, quoties fieri poterit, tollit: Tum diviſore per quotum inventum multiplicato, factoque ablato ex dividuo, diviſorem in locum proximè ſequentem promovet, novamque uti prius diviſionem inſtituit; donec totum dividendum percurrerit. Quilibet autem quotus particularis inventus, ejuſdem

ejuſdem debet eſſe loci, ſive gradus, cujus eſt figura dividendi, quæ ſtat, vel cogitatur ſtare ſupra unitatis locum diviſoris. Nam in Diviſione, Index cujuſque particularis figuræ Quoti, invenitur tollendo Indicem figuræ dividentis ex Indice figuræ diviſæ. Sic 171/4 diviſus per 857, dat 0/2 pro Quoto. Index enim primæ figuræ dividuæ 17 eſt 1; & Index primæ figuræ diviſoris 8 eſt 2: Tollatur 2 ex 1, reſtabit $\bar{1}$ pro Indice primæ figuræ: quæ idcircò pertinet ad locum primum partium decimalium.

3. Et ſi diviſor adjunctos ſibi habeat ad dextram circulos: omiſſis circulis, & abſciſſis totidem ultimis figuris dividendi, in numeris reliquis fiat diviſio. In fine autem diviſionis reſtituendi ſunt, tum omiſſi circuli tum figuræ abſciſſæ.

4. In Diviſione eſt, ut Diviſor ad unitatem, ſic Dividuus ad Quotum: vel ut Dividuus ad Diviſorem, ſic Quotus ad Unitatem. Ut diviſo 24 per 6, quotus erit 4: Eſt igitur 6. 1 :: 24. 4: Item 24. 6:: 4. 1.

5. Si magnitudo facta ſit ex duabus magnitudinibus, una ex iis ipſam per alteram metietur.

6. In Multiplicatione, atque Diviſione, unitas nihil mutat.

7. Si numerus numerum multiplicet, idemque factum dividat, nihil fit. Nam quod Multiplicatio conficit, Diviſio diſſolvit. Quare in applicatione magnitudinis ad magnitudinem, ſi eadem magnitudo ſit tum ſupra lineam, tum infra, expungatur utrobique. Ex-

Exempla Divisionis.

187135075 (630084 $\frac{127}{297}$

297
1782
893
297
891
2507
297
2376
1315
297
1188
127

6|000) 4320|765 (720|1275

12
8921317
297) 187135075 (630084 $\frac{127}{297}$
178213768
892118
2901
435257
580|34) 27566150 (47|5
23213680
406237
2901

8. Ali-

8. Aliquando numerus aliquis dividi postulatur per numerum irrationalem, vel infinitum, sive integer sit, sive mixtus. Atque in hoc casu, sumptis, quot opus est, è primoribus figuris divisoris pro primo divisore, per ipsas divides numerum propositum: deinde pro singulis particularibus divisionibus subsequentibus, divisorem minues amputando versus sinistram totidem ultimas figuras, donec quotum satis amplum inveneris: ut si dividantur 467023 per numerũ infinitum 357|0926425, Quotus erit 1307|80 ferè.

```
                    17
                   303
                  2803
                 109930
357|0926425) 467023 (1307|80——
                 357093
                 107127
                  2500
                   286
```

Pulcherrima hæc est divisionis contractio, & maximi usus in computationibus Astronomicis. Ut si per 137638 dividendus sit 126223 ductus in sinum totum hoc est auctum quinque circulis: Appones tantummodò unum circulum: & pro quatuor reliquis minues divisorem. Ut

137638) 1262230 (91707.

9. Divisio *speciosa* statuit magnitudinem dividentem sub dividendà, cum lineolà interjectâ:

jectâ: tum conſiderat an magnitudo aliqua utramque communiter multiplicaverit; atque ipſam utrobique expungit. Diviſio autem in iiſdem ſignis dat +, in diverſis —. Effertur autem per *ad*.

| Applica ad | AE / A | BAc / Aq | BA+A / A | BA-CA / B-C | 6Aq / 3A | &c. | 2x3Aq: / 3A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Oritur | E | BA | B+1 | A | 2A | | 2A |

## CAP. VI. *De Proportione.*

1. SI è quatuor numeris datis, primus ita ſe habeat ad ſecundum, ut tertius ad quartum: dicuntur quatuor illi numeri eſſe proportionales. Numerorum autem ad ſe invicem habitudo invenitur dividendo antecedentem per conſequentem: ut 31 ad 7 ratio eſt $4\frac{3}{7}$, hoc eſt quadrupla ſupertripartiens ſeptimas.

2. Quare ſi numerus duos numeros multiplicet, facti erunt multiplicatis proportionales. Et ſi numerus duos numeros dividat, quoti erunt diviſis proportionales.

Ut $4 \times \begin{cases} 7. & 28. \\ 9. & 36. \end{cases}$ & $4) \begin{matrix} 28 \\ 36 \end{matrix} \begin{matrix} (7. \\ (9. \end{matrix}$

Item $A \times \begin{cases} B. & BA. \\ C. & CA. \end{cases}$ & $A) \begin{matrix} BA. & B. \\ CA. & C. \end{matrix}$

3. Quare ſi quatuor numeri ſint proportionales, factus ab extremis æquatur facto à mediis. 7. 9:: 7x4. 9x4:: 28. 36. At 7x9x4 = 9x7x4.

4. Hinc ſequitur *Aurea* (quæ dicitur) *regula* Proportionis. Si è tribus numeris datis, rectangulum ſub 2^do & 3^o applicetur ad 1^um: hoc eſt,

eſt, ſi ſecundus multiplicet tertium,& primus dividat factum: quotus erit tribus datis quartus proportionalis. Tres numeri dati ſunto 7, 9, 28: & pro quarto quæſito ſtatuatur Q. Eſt igitur 7. 9:: 28. Q. Quare 7 Q = 9×28. Ideoque $\frac{9\times28}{7} = Q$. Item 5. 12::8. $\frac{8\times12}{5}$, hoc eſt 19 $\frac{1}{5}$.

5. E tribus numeris datis ad quartum Proportionalem inveniendum,duo primi innuunt rationem, & reliquus ingreditur quæſtionem; Eſtque in Proportione Directâ primus terminus(ſive Diviſor) homogeneus ei per quem fit quæſtio: At in Proportione Reciprocâ primus terminus ( ſive Diviſor ) ipſe eſt per quem fit quæſtio.

6. Directa quidem Proportio eſt, quando terminus is per quem fit quæſtio, quò major eſt, eò quartum majorem requirit: & quo minor eò minorem.

7. Reciproca Proportio eſt,quando terminus is per quem fit quæſtio, quò major eſt, eò 4^um^ minorem requirit: & quò minor, eò majorem.

8. Proportio continua ∴ eſt, quando termini omnes medii inter primum & ultimũ, rationum ſunt tum conſequentes,tum antecedentes. Ut 8,12,18,27,ſunt ∴. Nam 8.12::12.18::18.27. Item $\alpha, \beta, \frac{\beta q}{\alpha}, \frac{\beta c}{\alpha q}, \frac{\beta qq}{\alpha C}, \frac{\beta qc}{\alpha qq}$, &c. ſunt ∴

Quare ſi in hâc ſerie ultimus terminus ſit $\omega$, & ſumma omniũ terminorũ totius progreſſionis ſit Z: erit $Z-\omega$ ſumma omnium antecedentium: & $Z--\omega$ ſumma omnium conſequentium.

9. Si

9. Si quatuor magnitudines ſint proportionales, A.$\alpha$::B.$\beta$: etiam alternè, & inversè, & compoſitè, & diviſim, & conversè, & mixtim proportionales erunt.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | A. | $\alpha$ :: | B. | $\beta$. |
| alternè, | A. | B:: | $\alpha$. | $\beta$. |
| inversè, | $\alpha$. | A:: | $\beta$. | B. |
| compoſitè, | A+$\alpha$. | $\alpha$:: | B+$\beta$. | $\beta$. |
| vel, | A+B. | B:: | $\alpha$+$\beta$. | $\beta$. |
| diviſim, | A---$\alpha$. | $\alpha$:: | B--$\beta$. | $\beta$. |
| vel, | A--B. | B:: | $\alpha$--$\beta$. | $\beta$. |
| conversè, | A. | A$\pm\alpha$:: | B. | B$\pm\beta$. |
| vel, | A. | A$\pm$B:: | $\alpha$. | $\alpha\pm\beta$. |
| mixtim, | A+$\alpha$. | A-$\alpha$:: | B+$\beta$. | B-$\beta$. |
| vel, | A+B. | A-B:: | $\alpha$+$\beta$. | $\alpha$-$\beta$. |

10. Si quotlibet magnitudines ſint proportionales, erit ut unus antecedens, ad ſuum conſequentem; ſic ſumma antecedentium, ad ſummam conſequentium. Eſto A.$\alpha$ :: B.$\beta$ :: C.$\gamma$:: D.$\delta$: erit A.$\alpha$::A+B+C+D.$\alpha$+$\beta$+$\gamma$+$\delta$.

Nam { A.$\alpha$ :: B.$\beta$. & compoſitè.
A+B.$\alpha$+$\beta$:: (B.$\beta$::) C.$\gamma$. &
A+B+C.$\alpha$+$\beta$+$\gamma$:: (C.$\gamma$ ::) D.$\delta$. &c.

Item in $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$, $\alpha$.$\beta$:: Z-$\omega$. Z-$\alpha$. Quare $\alpha$Z-$\alpha$q=$\beta$Z-$\beta\omega$. vel $\beta$Z-$\alpha$Z=$\beta\omega$-$\alpha$q.

Hinc obitèr liquet inventio ſummæ omnium terminorum $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$, ſive Progreſſionis Geometricæ, per hanc

Regulam { $\frac{\beta\omega-\alpha q}{\beta-\alpha}$=Z.

11. Si plurium proportionum antecedentes ſint æquales; erit ut unus antecedens, ad ſummam

mam ſuorū conſequentiū: Sic alter antecedens ad ſummam ſuorū. Eſto A.B::α.β.& A.C::γ.γ::& A.D::α.δ.Erit A.B+C+D::α.β+γ+δ.Liquet ex priore demonſtratione, terminis alternè poſitis.

12. Si binarum rationum conſequentes ſint æquales, ſunt ut antecedentes. Si verò antecedentes ſint æquales, ſunt reciprocè ut conſequentes. $\frac{2}{1}.\frac{2}{1}::7.9.$ Et $\frac{1}{2}.\frac{1}{7}::7.9.$

13. Si bis quatuor magnitudines ſint ſimiliter proportionales; ipſarum etiam tum ſummæ, tum differentiæ proportionales erunt.

14. Si quatuor magnitudines proportionales, per alias quatuor magnitudines proportionales multiplicentur, vel dividantur: etiam Factæ, vel Quotæ, proportionales erunt. Sequitur ex 3.

15. Ratio antecedentis ad conſequentem componitur, vel ex ratione antecedentis ad tertium, & tertii ad conſequentem: vel ex ratione tertii ad conſequentem, & antecedentis ad tertium. Ut

$7.9.::\times\begin{cases}7.A.\\A.9.\end{cases}$ Item $7.9::\times\begin{cases}A.9.\\7.A.\end{cases}$

16. Inventio quarti proportionalis in computationibus Aſtronomicis.

Si 100000 ſit primus terminus, invenitur quartus per 5, Cap. 4. Caſ. 3. Ut

100000. 80902:: 39875. 32260.

Si 100000 ſit ſecundus terminus, invenitur quartus per 8, Cap. 5. Ut

137638. 100000:: 126223. 91707.

17. Inventio partis proportionalis ex datâ differentiâ duorum numerorum in Canone Proſthaphæreſeωn. In

In tabulis Prutenicis, Ad epicycli primi Lunæ Anomaliam Gr. 62, Proſthaph. ablativa eſt Gr. 4|1786. & Differentia ibidem Gr. 0|0433: Quanta ejus pars debetur Anomaliæ Gr. 2|5667? Dic

1. 0|0433 :: 0|5667. 0|0245 : per Cap. 4. Sect. 5. Caſ. II. Tum 4|1786+0|0245=4|2031: quæ eſt Proſthaph. correcta.

Et contrà ſi quæratur Anomalia primi Epicycli Lunæ, congruens Proſthaphæreſi Grad. 4|2031. Proximè minor in Canone eſt Gr. 4|1786, reſpondens Anomaliæ Gr. 62. Eſtque Differentia ibidem Gr. 0|0433. Eſt autem 4|2031--4|1786=0|0245. Dic

0|0433.0|0245::1.0|566+, partes adjungendæ Gr. 62. Eritque Anomalia quæſita Gr. 62|566+.

18. Converſio partium Sexageſimarum in Decimales & contra Decimalium in Sexageſimales.

Partes Sexageſimæ, puta 45, convertuntur in Decimales, dividendo per 60. Et contra partes Decimales, puta 0|75, convertuntur in Sexageſimas, multiplicando per 60.

Ut 6|0. 4|5 :: 1. 0|75. } Nam
& 1. 0|75 :: 60. 45. }

Diviſio per 60, removet lineam ſeparatricem uno loco verſus ſiniſtram, & inſuper dividit per 6. Et Multiplicatio per 60, promovet lineam ſeparatricem uno loco verſus dextram, & inſuper multiplicat per 6. Quæ regula notatu digna eſt. Si

Si verò plures ſint ſpecies Sexageſimales annexæ Integris, puta 127° 32′ 00″ 09‴ 45‴′: hoc uteris compendio. Sub Integris 127 ſtatue ſpecies Sexageſimales deſcenſu obliquo: Tum facto initio ad infimam, ſingulas divide continuè per 6: Et quotos ſupraſcriptos ordini proximo ſuperiori adjunges, donec ad Integros perveneris.

127|5333784722 x6
′32|002708333
″00|1625
‴09|75
6) ⁗45

Et contra, ſi partes Decimales dentur, puta 127′5333784722: multiplicabis ipſas continuè per 6; & factos ſubtus ſcribes, amputato in ſingulis ordinibus uno loco verſùs dextram; ut deſcenſus obliquus compleatur. Intuere diligenter exemplum.

Gradus Æquinoctialis, cum partibus Decimalibus, puta Grad. 236|4276, convertuntur in partes Decimales diei; dividendo per 360, hoc eſt 6x60. Et contra, partes, Decimales Diei puta 0|6567433: convertuntur in Gradus, multiplicando per 360. hoc eſt 60x6. Intuere diligenter exemplum.

6) 236|4276
60) 39|4046 x6
0|6567433: x60

Gradus Æquinoctialis, cum partibus Decimalibus puta Grad. 236|4276 convertuntur in Horas dividendo per 15, hoc eſt, 3x5.

3)236|4276
5) 78|8092x3
15|76184x5

Et

Et contra, Horæ cum partibus Decimalibus, puta 15|76184 convertuntur in Gradus, multiplicando per 15, hoc eſt, 5x3.

Horæ cum partibus decimalibus, puta Ho. 15|76184 convertuntur in partes Decimales Diei, dividendo per 24, hoc eſt, 4x6.

Et contra partes Decimales Diei, puta 0|657433 + 15|76184 convertuntur in Horas, multiplicando per 24, hoc eſt, 6x4.

{4) 15|76184 / 6) 3|94046x4 / 0|6567433:x6}

Summa collecta, puta 191374, convertitur in expanſam, dividendo continuè per 60, & contra ſumma eadem expanſa, 53, 09, 34, convertitur in collectam multiplicando continuè per 60.

Notandum autem hic eſt, quod ſi ſumma collecta ſit unitatum, ſcil. 191374°, expanſa erit 53° 09′ 34°, hoc eſt 53 Sexagenæ ſecundæ, 9 Sexag. 1ᵃ, & 34 unitates. Si vero ſumma collecta ſit ſexageſimarum ſecundarum, ſcil. 191374″; expanſa erit 53° 09′ 34″.

191374 | 4
60 318 | 9 | 3x60
53 | 0

19. Illa quidem proportio, rationum fuit æqualitas & dicitur Geometrica, eſt autem alia proportio Arithmetica, quæ eſt æqualitas differentiarum: nempe quando in quatuor terminis, eadem eſt differentia tertii & quarti, quæ eſt primi & ſecundi. Ut 7. 4: 12. 9 vel 7. 7-3: 12. 12-3. Arithmeticè proportionales ſunt.

20. Quare è quatuor numeris Arithmeticè pro-

proportionalibus, ſumma extremorum æqua-
tur ſummæ mediorum 7+12-3=7-3+12.

21. Et ſi è tribus numeris datis ſecundus ad-
datur tertio, & primus tollatur è ſumma: reli-
quus erit quartus Arithmeticè proportionalis.
Ut ſi dentur 7, 4, & 12 erit 12+4-7=9, qui
quartus eſt quæſitus.

22. Eſt etiam proportio Arithmetica con-
tinua, ſive Progreſſio, quando omnes termini
à primo eâdem continuè exſurgunt differentiâ.
Ut 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c. Differentia com-
munis omnium eſt 3. Nam in hac ſerie, primus
(& quaſi radix) eſt 4: ſecundus conſtat ex pri-
mo & differentiâ unâ: Tertius conſtat ex pri-
mo & differentiis duabus: Et generaliter qui-
libet terminus conſtat ex primo & ex ſumma
differentiarum, quarum numerus uno minor
eſt quam numerus terminorum: Exempli
gratia, terminus decimus tertius conſtabitur
ex primo & differentiis duodecim, quarum
ſumma eſt 36. Eſt igitur 4+36, hoc eſt 40,
terminus decimus tertius.

23. Si in Progreſſione Arithmetica, primus
terminus addatur ultimo, & ſumma ducatur
in numerum terminorum: factus erit duplicata
ſumma totius Progreſſionis: Nempe 40+4 in 13
=572, quæ ſumma eſt terminorum duplicata.

24. Si ſupra ſeriem terminorum in Progreſſi-
one Geometrica; ſtatuatur pro Indicibus, ſeries
terminorum qualiumcunque Progreſſionis A-
rithmeticæ, quibuſlibet quatuor numeris in A-
rithmetica proportione reſpondebunt quatuor
numeri Geometricè proportionales. In-

Indices, 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.
Termini, 5. 15. 45. 135. 405. 1215. 3645. 10935.

Quia 10+16-6=20; Erit $\frac{45\times1215}{5}$=10935.

Atque hinc patet inventio termini cujuſvis in Progreſſione Geometrica.

25. Eſt etiam tertia Proportio, Muſica dicta, quando in quatuor numeris, eſt ut primus ad 4^m^: ſic differentia primi & ſecundi, ad differentiam tertii & quarti. Ut 5, 8, 12, 30, ſunt Muſicè proportionales: quia 5. 30:: 8-5. 30-12 :: 3. 18. Id in ſpeciebus A, M, N, E; Eſto A.E::M--A.E--N. Quare AE--AN=ME--AE. Terminis hiſce ritè ordinatis Regula erit, $\frac{AN}{2A-M}$=E. & $\frac{EM}{2E-N}$=A.

In verbis ſic, Si rectangulum ſub primo & tertio dividatur per exceſſum primi duplicati ſupra ſecundum: quotus erit quartus in Muſica proportione. Quare oportet terminos ſic dari, ut primus duplicatus excedat ſecundum.

## CAP. VII.

*De Maxima COMMUNI MENSURA: Quâ numeri dati reducuntur ad minimos terminos ejuſdem rationis.*

1. MAxima duorum numerorum communis menſura invenitur perpetua diviſione majoris per minorem, & diviſoris per reliquum. Nam diviſor ille qui primus dividuum ſuum metitur, abſq; ullo reliquo maxima erit utri-

utriusque numeri dati communis mensura. Ut numerorum 899 & 744 maxima mensura invenietur 31.

31 124 155

31) ~~124~~) ~~155~~) ~~744~~) ~~899~~ (~~1~~ (~~4~~ (~~1~~ (

~~124~~ ~~124~~ ~~620~~ ~~744~~

2. Numerorum reductio ad minimos terminos ejusdem rationis fit dividendo utrumque per maximam ipsorum communem mensuram. Ut 899 & 744 reducuntur ad 29 & 24, qui minimi sunt termini in eadem ratione, diviso utroque per 31 maximam utriusque mensuram. Sic $\frac{3Aq}{6A}$ reducuntur ad $\frac{A}{2}$ dividendo utrumque terminum per 3A. Et $\frac{4Acc}{6Aqq}$ reducitur ad $\frac{2Ac}{3}$ dividendo per 2Aqq. Item $\frac{BA}{B}$ reducitur ad A, dividendo utrumque per B. Nam quod multiplicatio conficit, divisio dissolvit.

3. Quare, Si maxima duorum numerorum communis mensura sit 1 : dicuntur duo illi numeri primi inter se: suntque minimi in eadem ratione, ut 29 & 24.

4. Si numerus, primus sit ad utrumque factorem, Primus erit ad factum.

Hinc proportionis operatio fieri sæpenumero potest facilior, ut in exemplo.

1
~~3~~ 2 5
~~12~~. 8 :: ~~15~~. 10

5. Memento autem diligenter, *Quotiescunque fractio aliqua, sive ratio, proponitur, ut ipsam primò ad minimos terminos reducas*, ut $\frac{144}{899}$ fiant $\frac{24}{29}$

CAP.

## CAP. VIII.

### *De PARTIBUS: quæ etiam fractiones, ſive numeri fracti, dicuntur.*

1. UNitas (ſive integrum unumquodque) concipi mente poteſt in quotcunque æquales partes diviſibilis: quæ quidem partes denominationem ex numero ſuo, quem unitas continet, ſortiuntur: ut ſi unitas intelligatur dividi in binas æquales partes, dicuntur ſecundæ; ſi in tres, tertiæ: & ſic de reliquis.

2. Scribuntur partes duobus terminis cum lineola interjecta: quorum inferior denotat unitatem diviſam in totidem æquales partes; & dicitur Denominator. Superior verò oſtendit quot ex partibus illis ſignificantur; atque ideò dicitur Numerator.

Ut $\frac{4}{5}$ Numerator, Denominator } & ſignificant quatuor quintas partes, ſive quatuor partes unius integri diviſi quinquifariam.

3. *Quam igitur rationem habet numerator ad denominatorem, eandem habet quantitas ſignificata ad unitatem.* 4.5::$\frac{4}{5}$.1. R.S.::$\frac{R.1.}{S}$

4 Et quia ratio quævis terminis innumeris ſimiliter ſeſe ad invicem habentibus (quorum quidem maximi dari nequeunt) poterit exprimi: ſequitur partes etiam eaſdem, non iiſdem ſolummodò numeris, ſed aliis infinitis, poſſe deſignari. Ut quincuncem ſignificant non

modo $\frac{1}{12}$, qui minimi ſunt termini in eadem ratione, ſed etiam $\frac{12}{24},\frac{20}{40},\frac{84}{160},\frac{42}{80}$: & quotcunque alii numeri fiunt multiplicando 5 & 12 in alium quemvis numerum, per 2 cap. 6.

5. Quare æqualium partium, ſive fractionum, termini ſunt proportionales; & contra.

6. Item, ſi partium numerator minor ſit denominatore, partes ſunt unitate minores: ſi æqualis, ſignificant unitatem; et ſi major, partes unitatem excedunt, eâdem ratione quâ denominator à numeratore ſuperatur. Reducuntur autem ad unitates dividendo numeratorem per denominatorem: ut $\frac{11}{7}$ ſunt $4\frac{3}{7}$ item $\frac{CR+SA}{R}$ eſt $\frac{C+SA}{R}$. Et contra integri, ſive unitates reſolvuntur in partes cujuſque generis multiplicando unitates per denominatorem earundem partium, ut 1 fiet $\frac{2}{2}$, vel $\frac{1}{1}$, &c. & $4\frac{3}{7}$ fient $\frac{28+3}{7}$, hoc eſt $\frac{11}{7}$. Item $\frac{C+SA}{R}$ fiet $\frac{CR+SA}{R}$.

## CAP. IX.

### *De Additione & Subductione Partium.*

1. SI partes propoſitæ diverſarum ſint ſpecierum: Primò reducendæ ſunt ad eandem denominationem, dividendo denominatores per maximam ipſorum communem menſuram; & multiplicando terminos per alternos

nos quotos. Deinde in numeratoribus partium inventarum ejusdem denominationis additio vel subductio instituenda est. Et summæ denique, vel differentiæ, communis ille denominator subscribendus.

2. Et si integri partibus sint immixti, seorsim tamen sunt numerandi. Ex empli gratia: Ex $6\frac{1}{18}$ tollatur $\frac{13}{16}$ & $2\frac{7}{12}$. Primò addendæ sunt $\frac{13}{16}$ & $2\frac{7}{12}$ eruntque 2 & $\frac{39+28}{48}$ vel $\frac{67}{48}$, nempe $3\frac{19}{48}$: quibus redemptis è $6\frac{1}{18}$ restabunt $2\frac{95}{144}$ ut in exemplo.

$$\begin{array}{l} \quad 67 \\ 39+28 \\ \cancel{13} \quad \cancel{7} \\ -\ 2\ - \\ 4)\cancel{16} \quad \cancel{12} \\ \underbrace{4 \quad 3}_{48} \end{array} \quad \text{est } 3 \quad \begin{array}{l} \quad 57 \quad 8 \\ \cancel{19} \quad 1 \\ -\text{è } 6\ - \\ 6)\cancel{48} \quad \cancel{18} \\ \underbrace{8 \quad 3}_{144} \end{array}$$

è $5\frac{152}{144} = 6\frac{8}{144}$ tolle $3\frac{57}{144}$ manet $2\frac{95}{144}$

Adde $\frac{A}{B}$ & Z, summa $\frac{A+ZB}{B}$

Ex $\frac{A}{B}$ tolle $\frac{B}{C}$, restat $\frac{CA - Bq}{BC}$

$$\begin{array}{l} BE \pm DA \\ B \pm D \\ C)\overline{CA}\ \overline{CE} \\ -\ A \quad E \\ \underbrace{\quad}_{CAE} \end{array}$$

## CAP. X.

### *De Multiplicatione & Divisione Partium.*

1. MUltiplicatio comparat heterologos terminos (hoc est, reducit ad minimos) & multiplicat homologos.

2. Divisio comparat homologos terminos, & multiplicat heterologos.

3. Et si integri partibus sint immixti resolvendi sunt integri in partes.

Exempla Multiplicationis.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{16}}}\text{ in }\frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{27}}}\text{ fit }\frac{5}{12} \quad\Big|\quad \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{9}}\text{ in }\frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}}\text{ fit }\frac{20}{27} \quad\Big|\quad \frac{5}{1}\text{ in }\cancel{3}\,\frac{\overset{13}{\cancel{1}}}{4}\text{ fit }\frac{65}{4}\Big(16\tfrac{1}{4}$$

$$\frac{A}{B}\text{ in B fit A} \quad\Big|\quad \frac{A}{B}\text{ in Z fit }\frac{ZA}{B} \quad\Big|\quad \frac{A}{B}\text{ in }\frac{ZA}{C}\text{ fit }\frac{ZAq}{BC}$$

Exempla Divisionis.

$$\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{16}}}\Big)\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{7}{\cancel{28}}}\Big(\frac{20}{21} \quad\Big|\quad \frac{8}{\underset{3}{\cancel{15}}}\Big)\cancel{7}\,\frac{\overset{37}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}\Big(\frac{111}{8}\Big(13\tfrac{7}{8} \quad\Big|\quad \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{4}\Big)\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{1}\Big(\frac{12}{1}$$

$$\frac{D}{1}\Big)\frac{Aq}{B}\Big(\frac{Aq}{DB} \quad\Big|\quad \frac{A}{D}\Big)\frac{BC}{1}\Big(\frac{BCD}{A} \quad\Big|\quad \frac{A}{B}\Big)\frac{BC}{1}\Big(\frac{BqC}{A}$$

$$\frac{B}{A}\Big)\frac{BC}{1}\Big(\frac{CA}{1} \quad\Big|\quad \frac{Ac}{C}\Big)\frac{Bc}{D}\Big(\frac{BcC}{DAc}$$

4. Quis

4. Quis numerus eſt $\frac{2}{7}$ è 21? Multiplica 21 per $\frac{2}{7}$. Nam 1. $\frac{2}{7}$::21.6. vel 7. 2::21.6.

5. Cujus numeri 6 continet $\frac{2}{7}$? Divide 6 per $\frac{2}{7}$. Nam $\frac{2}{7}$. 1::6.21. vel 2.7::6.21.

6. Apud antiquos MuſicæScriptores termini multiplicandi in rationum ſive continuatione, ſive imminutione, connectuntur lineolis curvis, in hunc modum: ſi rationes ſint 3 ad 2, & 4 ad 3.

7. Rationum continuatio fit per Multiplicationem ipſarum, ac ſi eſſent fractiones. Continuentur rationes 3 ad 2,& 4 ad 3: idem eſt ac ſi dicatur,multiplicentur $\frac{3}{2}$ in $\frac{4}{3}$, fientq; $\frac{12}{6}$, quæ dupla eſt ratio. Quare ratio ſeſquialtera continuata cum ratione ſeſquitertiâ facit duplam: vel ut loquuntur Muſici, ex diapente & diateſſaron fit diapaſon.

8. Rationum imminutio fit per Diviſionem: ut è ratione 3 ad 2 detrahenda ſit 4 ad 3: Idem eſt acſi jubeatur $\frac{3}{2}$ dividi per $\frac{4}{3}$ reſtabitque $\frac{9}{8}$: nam $\frac{4}{3})\frac{3}{2}(\frac{9}{8}$ ratio ſeſquioctava: quæ menſura eſt Toni integri. Unde dicunt Muſici quod differentia inter diapente & diateſſaron eſt Tonus. Ut in hâc lineâ ſive chordâ divisa in duodecim partes.

12 9 8 6 0

## CAP. XI.

*Exempla aliquot facillima, quibus quæ hactenus tradita ſunt familiaria redduntur: Et via ad Æquationem Analyticam ſternitur.*

1. SCiendum primò eſt, quod, in ſequentibus, tum brevitatis, tum phantaſiæ juvandæ gratia, paſſim ferè his verborum ſymbolis utor. A & E ſignificant duos numeros, ſive magnitudines; quorum A plerumque major eſt, E minor. Æ rectangulum ſub ipſis. Z eſt ſumma. X differentia. Zq ſummæ quadratum. Xq differentiæ quadratum. Z ſumma quadratorum. X differentia quadratorum. Z ſumma cuborum. X differentia cuborum. A, M, E, ſunt tres continuè proportionales: A, M, N, E, quatuor. Q: C: QQ: QC: &c. præfixæ magnitudinibus inter duo utrinque puncta incluſis ſignificant illiuſmodi poteſtates. √ denotat radicem ſive latus poteſtatis ſimplicis, ſi non intercedant duo puncta: Si vero poteſtas duobus utrinque punctis includatur, ſignificat latus ipſius univerſale: quod etiam aliter per literam b vel r deſcribi ſolet, ut √ b latus eſt Binomii, & √ r latus Reſidui ſive Apotomes. = nota eſt æqualitatis.

2. Sunt duo numeri ſive magnitudines, quorum major eſt A, minor E: quænam eſt ipſorum ſumma? quæ differentia? quod ſub ipſis rectangulum? quæ quadratorum ſumma? quæ quadratorum differentia? quæ ſummæ & diffe-

differentiæ ipſorum ſumma? quæ ſummæ & differentiæ ipſorum differentia? quod ſummæ & differentiæ ipſorum rectangulum? quod ſummæ quadratum? quod differentiæ quadratum? quæ quadratorum ſummæ & differentiæ ſumma? quæ quadratorum ſummæ & differentiæ differentia? quod quadratū rectanguli?

Z eſt A+E. X eſt A--E. Æ eſt AE.
Z=Aq+Eq X=Aq--Eq.
Z+X=2A Z-X=2E.
½Z+½X=A. ½Z-½X=E.
ZX=Aq-Eq=X. Zq.X::Z.X.
Zq=Aq+2AE+Eq=Z+2Æ.
Xq=Aq-2AE+Eq=Z-2Æ.
Zq+Xq=2Aq+2Eq=2Z.
Zq-Xq=4AE. ¼Zq-¼Xq=Æ.
Æq=AqEq.

3 Sunt duo numeri ſive magnitudines, quorum ſumma eſt Z, & major ex ipſis ponitur A: quiſnam eſt minor? quæ ipſorum differentia? quod ſubipſis rectangulum? quæ quadratorum ſumma? quæ quadratorum differentia?

E=Z—A X=2A-Z. Æ=ZA—Aq
Z=Zq-2ZA+2Aq. X=2ZA-Zq.

Si vero minor ex ipſis ponatur E.

A=Z-E X=Z-2E. Æ=ZE-Eq.
Z=Zq-2ZE+2Eq. X=Zq-2ZE.

4. Sunt duo numeri ſive magnitudines, quorum differentia eſt X, & major ex ipſis

ponitur A : quiſnam eſt minor ? quæ ipſorum ſumma ? quod ſub ipſis rectangulum ? quæ quadratorum ſumma ? quæ quadratorum differentia ?

$E = A - X$. $Z = 2A - X$. $Æ = Aq - XA$.
$Z = 2Aq - 2XA + Xq$. $X = 2XA - Xq$.

Si vero minor ex ipſis ponatur E.

$A = E + X$ $Z = 2E + X$ $Æ = Eq + XE$.
$Z = 2Eq + 2XE + Xq$. $X = 2XE + Xq$.

5. Sunt duo numeri ſive magnitudines, quorum major ad minorem, rationem habet R ad S; & major ex ipſis ponitur A : quiſnam eſt minor ? quæ ipſorum ſumma ? quæ ipſorum differentia ? quod ſub ipſis rectangulum ? quæ quadratorum ſumma ? quæ quadratorum differentia.

$$E = \frac{SA.}{R} \quad Z = \frac{RA+SA}{R} \quad X = \frac{RA-SA.}{R}$$

$$Æ = \frac{SAq}{R} \quad Z = \frac{RqAq+SqAq}{Rq} \quad X = \frac{RqAq-SqAq.}{Rq}$$

Si vero minor ex ipſis ponatur E.

$$A = \frac{RE.}{S} \quad Z = \frac{RE+SE.}{S} \quad X = \frac{RE-SE.}{S}$$

$$Æ = \frac{REq}{S} \quad Z = \frac{RqEq+SqEq}{Sq} \quad X = \frac{RqEq-SqEq.}{Sq}$$

6. Sunt

6. Sunt duo numeri ſive magnitudines, quorum rectangulum eſt Æ; & major ex ipſis ponitur A: quiſnam eſt minor? quæ ipſorum ſumma? quæ ipſorum differentia? quæ quadratorum ſumma? quæ quadratorum differentia?

$$E=\frac{Æ}{A} \qquad Z=\frac{Aq+Æ.}{A} \qquad X=\frac{Aq-Æ.}{A}$$

$$Z=\frac{Aqq+Æq.}{Aq} \qquad X=\frac{Aqq-Æq.}{Aq}$$

Si vero minor ex ipſis ponatur E:

$$A=\frac{Æ}{E} \qquad Z=\frac{Æ+Eq.}{E} \qquad X=\frac{Æ-Eq.}{E}$$

$$Z=\frac{Æq+Eqq.}{Eq} \qquad X=\frac{Æq-Eqq.}{Eq}$$

7. Atque ex his comparatis multæ æqualitates oriuntur. Exempla ſumemus in ſumma & differentia.

$$Z=A+E=2A-X=2E+X=\frac{Aq+Æ}{A}=\frac{Æ+Eq}{E}\&c.$$

$$X=A-E=2A-Z=Z-2E=\frac{Aq-Æ}{A}=\frac{Æ-Eq}{E}\&c.$$

Hoc modo etiam in reliquis comparationes poterunt inſtitui, quibus eadem magnitudo multas admittet interpretationes atque diverſitates.

## CAP. XII.

### *De Geneſi & Analyſi* POTESTATUM.

1. QUia omnia reſolvuntur in eaſdem partes, ex quibus coagmentantur: primò ſcire oportet ex quibus partibus quælibet poteſtas conſtituitur. Poteſtates autem fiunt à radice aliquoties in ſe multiplicatâ. Nam latus in ſe ductum facit quadratum: Quadratum ductum in latus facit cubum: Cubus ductus in latus ſuum facit quadrato-quadratum, quæ poteſtas eſt quartana [4]: hæc iterum ducta in latus facit quadrato-cubum, ſcilicet quintanam [5]: Et ſic ulteriùs progrediendo fiunt poteſtates ſextana [6], ſeptimana [7], octavana [8], nonana [9], decumana [10], & reliquæ, pro numero dimenſionum ſuarum, ex quibus componuntur.

2. Quare poteſtatum à radice ſingulari, quæ unica figura, ſive nota, conſtat, procreatio nihil habet difficultatis.

## *Tabula Prior* POTESTATUM *à* RADICE *singulari.*

| L N | [2] q | [3] c | [4] qq | [5] qc | [6] cc | [7] qqc | [8] qcc |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |
| 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 |
| 4 | 16 | 64 | 256 | 1024 | 4096 | 16384 | 65536 |
| 5 | 25 | 125 | 625 | 3125 | 15625 | 78125 | 390625 |
| 6 | 36 | 216 | 1296 | 7776 | 46656 | 279936 | 1679616 |
| 7 | 49 | 343 | 2401 | 16807 | 117649 | 823543 | 5764801 |
| 8 | 64 | 512 | 4096 | 32768 | 262144 | 2097152 | 16777216 |
| 9 | 81 | 729 | 6561 | 59049 | 531441 | 4782969 | 43046721 |

3. Quæ

3. Quæ verò à radice binarum notarum exſurgunt, hunc habent ortus ſui modum.

Geneſis poteſtatum à radice binomia.

A+E Radix
A+E

Aq+AE
+AE+Eq

Aq+2AE+Eq. Quadratum
A+E

Ac+2AqE+AEq
+AqE+2AEq+Ec

Ac+3AqE+3AEq+Ec. Cubus
A+E

Aqq+3AcE+3AqEq+AEc
+AcE +3AqEq +3AEc+Eqq

Aqq+4AcE+6AqEq+4AEc+Eqq. Quadrato-
A+E &c. (quadrat.

4. Atque hoc artificio conficietur tabula poteſtatum aſcendentium in ſcala à radice binomia: quæ *POSTERIOR* vocetur.

A E

| E A | Latus five numerus. | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [2] | | | | | | | | | |
| Aq | | | | | | | | | |
| 2AE | | | | | | | | | |
| Eq | | | | | | | | | |
| | [3] | | | | | | | | |
| | Ac | | | | | | | | |
| | 3AqE | | | | | | | | |
| | 3AEq | | | | | | | | |
| | Ec | | | | | | | | |
| | | [4] | | | | | | | |
| | | Aqq | | | | | | | |
| | | 6AqEq | | | | | | | |
| | | 4AcE | | | | | | | |
| | | 4AEc | | | | | | | |
| | | Eqq | | | | | | | |
| | | | [5] | | | | | | |
| | | | Aqc | | | | | | |
| | | | 5AqqE | | | | | | |
| | | | 10AcEq | | | | | | |
| | | | 10AqEc | | | | | | |
| | | | 5AEqq | | | | | | |
| | | | Eqc | | | | | | |
| | | | | [6] | | | | | |
| | | | | Acc | | | | | |
| | | | | 6AqcE | | | | | |
| | | | | 15AqqEq | | | | | |
| | | | | 20AcEc | | | | | |
| | | | | 15AqEqq | | | | | |
| | | | | 6AEqc | | | | | |
| | | | | Ecc | | | | | |
| | | | | | [7] | | | | |
| | | | | | Aqqc | | | | |
| | | | | | 7AccE | | | | |
| | | | | | 21AqcEq | | | | |
| | | | | | 35AqqEc | | | | |
| | | | | | 35AcEqq | | | | |
| | | | | | 21AqEqc | | | | |
| | | | | | 7AEcc | | | | |
| | | | | | Eqqc | | | | |
| | | | | | | [8] | | | |
| | | | | | | Aqcc | | | |
| | | | | | | 8AqqcE | | | |
| | | | | | | 28AccEq | | | |
| | | | | | | 56AqcEc | | | |
| | | | | | | 70AqqEqq | | | |
| | | | | | | 56AcEqc | | | |
| | | | | | | 28AqEcc | | | |
| | | | | | | 8AEqqc | | | |
| | | | | | | Eqcc | | | |
| | | | | | | | [9] | | |
| | | | | | | | Accc | | |
| | | | | | | | 9AqccE | | |
| | | | | | | | 36AqqcEq | | |
| | | | | | | | 84AccEc | | |
| | | | | | | | 126AqcEqq | | |
| | | | | | | | 126AqqEqc | | |
| | | | | | | | 84AcEcc | | |
| | | | | | | | 36AqEqqc | | |
| | | | | | | | 9AEqcc | | |
| | | | | | | | Eccc | | |
| | | | | | | | | [10] | |
| | | | | | | | | Aqqcc | |
| | | | | | | | | 10AcccE | |
| | | | | | | | | 45AqccEq | |
| | | | | | | | | 120AqqcEc | |
| | | | | | | | | 210AccEqq | |
| | | | | | | | | 252AqcEqc | |
| | | | | | | | | 210AqqEcc | |
| | | | | | | | | 120AcEqqc | |
| | | | | | | | | 45AqEqcc | |
| | | | | | | | | 10AEccc | |
| | | | | | | | | Eqqcc | |

5. Quælibet ſpecies intermedia cujuſq; ordinis componitur ex duabus ſpeciebus ordinis præcedentis utrinq; proximis: nempe A poteſtate ſuperioris ſpeciei, & E poteſtate inferioris. Numerus etiã affigendus ex utroq; numero iiſdem affixo, aggregatur. Quare continuari facile poterit hæc tabula ulterius pro libitu.

6. In hâc tabulâ duæ extremæ poteſtates ſingulorũ generũ ſunt diagonales: & ſpecies intermediæ ſunt complementa: quibus affixæ ſunt *unciæ*, oſtendentes numerum complementorum in conſtitutione cujuſque poteſtatis ſumendorum. Complementa autem omnia, cum E poteſtate, Gnomon non ineptè dici poterit.

7. Ex hâc tabulâ etiam liquet, quod quadratum à radice binarum notarum conſtat ex diagonalibus quadratis utriuſq; notæ, & duplice rectangulo ſub ipſis notis. Cubus autem conſtat ex cubis diagonalibus & triplice item ſolido ſub quadrato majoris notæ & notâ minore, & triplice item ſolido ſub majore notâ & quadrato minoris. Quod ſimiliter de reliquis quoque poteſtatibus eſt efferendum.

8. Oſtendit inſuper plena hæc myſteriis pulcherrimis tabella, in numeroſa poteſtate, ſedes tum poteſtatum ſingularium ſive diagonalium, tum cujuſque ſpeciei complementorum. Nam cùm inter bina quadrata unica eſt ſpecies, quadratorum ſedes unicum interponent pro complementis locũ. Et cùm inter binos cubos duæ ſunt complementorum ſpecies, cuborum ſedes binos interponent locos complementis ſuis ordine diſtribuendos.

CAP.

## CAP. XIII.

*His itaque præmiſſis ad GENESIN. Poteſtatum accedamus.*

1. PRoponatur Geneſis quadrati à latere 57. Major igitur nota A eſt 5, minor E eſt 7. Scribantur 5 & 7 intermiſſo unius gradus ſpatio: & linea ſub ipſis ducatur. Sub 5 ſtatuatur quadratum ſuum 25: & ſub 7 ſuum 49. tum duplicetur 5, & multiplicetur per 7, fietque duplum rectangulum 70, ponendū loco intermedio. Addantur omnia ſuis quæque locis. Summa erit 3249 pro quadrato lateris 57 quæſito.

| 5 | 7 | |
|---|---|---|
| 25 | | Aq |
| 7 | 0 | 2AE } gnomon. |
| | 49 | Eq } |
| 32 | 49 | |

2. Proponatur iterum Geneſis cubi à latere 57. Scribantur 5 & 7 intermiſſo duorum graduum ſpatio: & linea ſub ipſis ducatur. Sub 5 ſtatuatur cubus ſuus 125: & ſub 7 ſuus 343. tum quadratū à 5 triplicetur, & multiplicetur per 7, fietque triplum ſolidum majus 525, ponendum loco

| 5 | 7 | |
|---|---|---|
| 125 | Ac | |
| 52 | 5 | 3 AqE ) |
| 7 | 35 | 3 AEq } gnomon. |
| | 343 | Ec ) |
| 185 | 193 | |

loco priore intermedio: item triplicetur 5, & multiplicetur per 49 quadratum à 7, fietque triplum ſolidum minus 375, ponendum loco intermedio ſecundo. Addantur omnia ſuis quæque locis: ſumma erit 185193 pro cubo lateris 57 quæſito.

3. Si latus propoſitum conſtet pluribus figuris, ut 57209: Primò poteſtas duarum primarum figurarum 57 quærenda eſt. Deinde ſumptis 57 pro A, & figura 2 ſequente pro E: quæratur poteſtas ipſius eodem, qui ante oſtenſus eſt, tabellæ ordine. Quod etiam in reliquis figuris ſingulatim eſt faciendum.

| 5 | 7 | 2 | 0 | 9 | Radix. |
|---|---|---|---|---|---|
| 25 | | Aq | | | |
| 7 | 0 | 2Æ | } gnomon. | | |
| | 49 | Eq | | | |
| 32 | 49 | | Aq | | |
| | 22 | 8 | 2Æ | } gnomon. | |
| | | 4 | Eq | | |
| 32 | 71 | 84 | 00 | | Aq |
| | 1 | 02 | 96 | 0 | 2Æ } gnomon. |
| | | | | 81 | Eq |
| 32 | 72 | 86 | 96 | 81 | Quadrat. |

| 5 | 7 | 2 | 0 | 9 | Radix. |
|---|---|---|---|---|---|
| 125 | | Ac | | | |
| 52 | 5 | 3AqE | | | |
| 7 | 35 | 3AEq | | | Gnomon. |
| | 343 | Ec | | | |
| 185 | 193 | | Ac | | |
| 1 | 949 | 4 | 3AqE | | |
| | 6 | 84 | 3AEq | | Gnomon. |
| | | 8 | Ec | | |
| 187 | 149 | 248 | 000 | | Ac |
| | 88 | 339 | 680 | 0 | 3AqE |
| | | 13 | 899 | 60 | 3AEq Gnomon. |
| | | | | 729 | Ec |
| 187 | 237 | 601 | 580 | 329 | Cubus. |

4. Ex his, quæ jam declarata ſunt, non difficile erit reliquas etiam omnes ſuperiorum generum poteſtates progignere: modò in ipſarum genituræ inferiorum omnium ad ipſas adſcendentium poteſtatum geneſis inſtituatur: ſicut in cubi geneſi jam factum vides.

CAP.

## CAP. XIV.

*Sequitur ANALYSIS: quæ eſt eductio radicis ex numeroſa poteſtate data.*

1. ANalyſis, poſtquam ſedes poteſtatum, pro ſuo quaſque juxta tabulam genere, punctis, poſito primo puncto ſub loco unitatum, diſtinxerit: primò ex figuris primi à ſiniſtra puncti poteſtatem diagonalem comprehenſam tollit: latuſque ipſius, quod A vocetur, in margine ſcribit. Tum numero reliquo, ad proximum uſque punctum (qui gnomonem intelligitur continere) per diviſorem ex latere A invento legitimè conflatum, diviſo, ſecundum latus E quærit & in margine ſcribit: per quod demùm gnomonem perficit: perfectumque ex reliquo illo ſubtrahit. Et ſic integra duorum primorum ſingularium laterum, in duobus primis punctis contenta, poteſtate dempta, reſtabit ad tertium uſque punctum gnomon pro tertio latere ſimiliter eruendo.

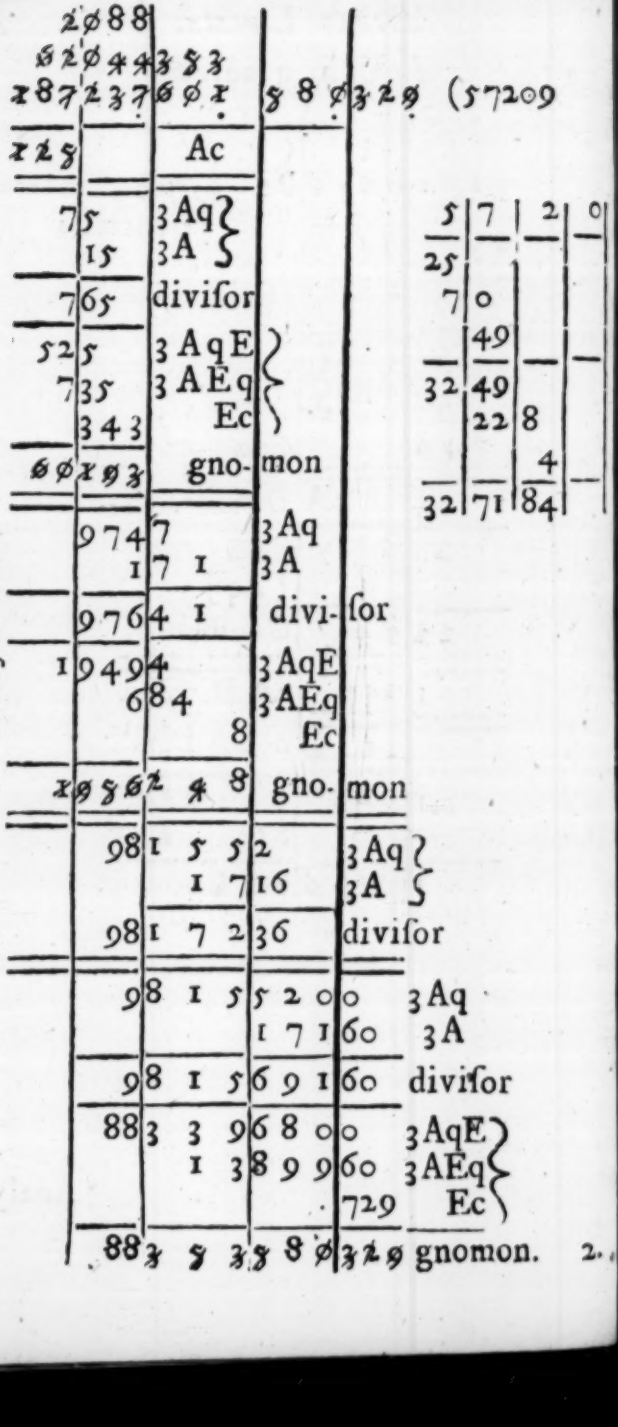
Analyſis

Analysis quadrati.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 723 | 02 | |
| 3272 | 8696 | 81 (57209 punctatio |
| 28 | Aq | |
| 10 | 2 A | Divisor. |
| 70 | 2AE | |
| 49 | Eq | |
| 749 | | Gnomon. |
| 11 | 4 2A | Divisor. |
| 22 | 8 | 2AE |
| | 4 | Eq |
| 22 | 84 | Gnomon. |
| 1 | 144 | 2A Divisor. |
| | 1144 | 0 2A Divis. |
| 1 | 0296 | 0 2AE |
| | | 81 Eq |
| 1 | 2296 | 81 Gnomon. |

Analysis

Analyſis Cubi.



2. Si numerus propoſitus non ſit verus ſui generis figuratus, ſed peracta Analyſi aliquid reſtet: punctationes circulorum pro ſuo genere, quot opus erit, ſtatuendæ ſunt: & continuanda Analyſis poſt lineam ſeparatricem.

3. Ex his etiam quæ declarata ſunt, non difficile erit ope tabellæ radices ex ſuperioribus poteſtatibus omnibus educere.

---

## CAP. XV.

## *De LATERIBUS SURDIS.*

1. SI quotlibet numeri ſint continuè proportionales: Erit ut primus ad ultimum, ſic poteſtas primi æquimultiplicata numero terminorum minus uno, ad poteſtatem ſimilem ſecundi. Sunto quatuor ∴ A,M,N,E.

Quia { A.M::A.M, M.N::A.M, N.E::A.M } Erit per Multiplicationem A.E::Ac.Mc.

2. Numeri plani vel ſolidi ſimiles, ſunt, quorum latera homologa ſunt proportionalia.

3. Numeri plani ſimiles, ſunt in duplicatâ ratione (hoc eſt, ut quadrata) homologorum laterum. Sunt igitur numeri plani ſimiles, ut quadratus numerus ad quadratum numerum. Item numeri ſolidi ſimiles, ſunt in triplicatâ ratione (hoc eſt, ut Cubi) homologorum laterum. Sunt igitur numeri ſolidi ſimiles, ut numerus Cubicus ad numerum Cubicum.

4 Et

4. Et generaliter omnes figurati ſimiles plurium dimenſionum, ſunt in ratione homologorum laterum, æquimultiplicatâ numero dimenſionum, ex quibus componuntur. Dimenſiones ſunto quatuor, nempe A B C D unius, & E F G H alterius, in ratione R ad S.

Quia { A. E::R.S / B. F::R. S / C.G::R.S / D.H::R.S } Erit per multiplicationem ABCD. EFGH::Rqq. Sqq.

5. Si numerus non ſit verus ſui generis figuratus, latus ejus dicitur ſurdum: & ſic notatur, √q6, √c4, √qq20, √qc13: hoc eſt, latus quadrati 6, latus cubi 4, latus quadrato-quadrati 20, latus quadrato-cubi 13. &c.

6. Latera ſurda commenſurabilia, ſunt, quorum numeri ad minimos terminos reducti, fiunt veri ſui generis figurati: ſuntque idcirco ut numerus ad numerum, ut √q12 & √q147 reducta ad minimos terminos per √q3 maximam utriuſque communem menſuram, fiunt √q4 & √q49, hoc eſt 2 & 7: quare cum √q12 & √q147, ſint ut 2 ad 7, erunt cōmenſurabilia. Sic √c40 & √c1715 ſunt ut 2 ad 7, quoniam diviſa per maximam ſuam communem menſuram √c5, fiunt √c8 & √c343; hoc eſt 2 & 7, ideoque commenſurabilia.

7. Adduntur autem, atque ſubtrahuntur, latera ſurda commenſurabilia, ſi ſummæ, vel differentiæ, numerorum ipſis ſimilium inventorum

torum homogenea poteſtas ducatur in communem ipſorum menſuram. Ut $\sqrt{q147}+\sqrt{q12}$ eſt $\sqrt{q243}$; hoc eſt latus quadrati à $7+2$(nempe 81) ductum in $\sqrt{q3}$ maximam ipſorum communem menſuram. Et $\sqrt{q147}-\sqrt{q12}$ eſt $\sqrt{q75}$; hoc eſt latus quadrati à $7-2$(nempe 25)ductum etiam in $\sqrt{q3}$.

Item $\sqrt{c1715}+\sqrt{c40}$ eſt $\sqrt{c3645}$, hoc eſt latus cubi $7+2$ (nempe 729) ductum in $\sqrt{c5}$ maximam ipſorum communem menſuram. Et $\sqrt{c1715}-\sqrt{c40}$ eſt $\sqrt{c625}$, hoc eſt latus cubi à $7-2$ ductum etiam in $\sqrt{c5}$.

Additionis & ſubductionis operatio talis eſt.

$\sqrt{q3}$) $\sqrt{q147}$ ($\sqrt{q49}.7$
$\sqrt{q}\ 12$ ($\sqrt{q4}.\ 2.$

$\sqrt{c5}$) $\sqrt{c1715}$ ($\sqrt{c343}.\ 7$
$\sqrt{c}\ \ 40$ ($\sqrt{c}\ 8.\ 2$

$\sqrt{q243}$ $\sqrt{q81}.9$ ſumma $\sqrt{c3645}$ ($\sqrt{c729}.\ 9$
$\sqrt{q75}$ $\sqrt{q25}.5$ differ. $\sqrt{c}\ 625$ ($\sqrt{c125}.\ 5$

$\sqrt{12}+\sqrt{\frac{27}{4}}$
vel $\sqrt{\frac{48}{4}}+\sqrt{\frac{27}{4}}$

$\sqrt{\frac{1}{4}}$) $\sqrt{48}$ ($\sqrt{16}.\ 4$
$\sqrt{27}$ ($\sqrt{9}.\ 3$

$\sqrt{\frac{147}{4}}$ $\sqrt{49}.\ 7$
$\sqrt{\frac{1}{4}}$ $\sqrt{1}.\ 1$

$\sqrt{\frac{245}{12}}+\sqrt{\frac{5}{12}}$

$\sqrt{\frac{1}{12}}$) $\sqrt{245}$ ($\sqrt{49}.\ 7$
$\sqrt{5}$ ($\sqrt{1}.\ 1$

$\sqrt{\frac{320}{12}}$ $\sqrt{64}.\ 8$
$\sqrt{\frac{180}{12}}$ $\sqrt{36}.\ 6$

8. Latera verò ſurda incommenſurabilia, atque heterogenea, adduntur, vel ſubtrahuntur, ſignis + vel −. ut $\sqrt{q7}+\sqrt{q3}$. & $\sqrt{c10}-\sqrt{c5}$.

9. Si numerus figuratus per numerum figuratum homogeneum multiplicetur, factus erit nu-

numerus ejuſdem generis figuratus, cujus latus æquale eſt facto à lateribus numerorum multiplicatorum. Et ſi numerus figuratus per numerum figuratum homogeneum dividatur, quotus erit numerus ejuſdem generis figuratus cujus latus æquale eſt quoto lateris Dividendi ad Diviſoris latus applicati. Ut factus à numeris cubicis 343 & 27 eſt 9261, numerus etiam cubicus, cujus latus eſt 7×3. Item $\sqrt{q}\frac{AqEq}{Bq}$ eſt $\frac{AE}{B}$.

10. Quare laterum ſurdorum homogeneorum multiplicatio, & diviſio, procreat latus etiam ſurdum homogeneum: ut $\sqrt{q}7$ in $\sqrt{q}3$ eſt $\sqrt{q}21$. Et $\sqrt{q}7) \sqrt{q}21 ( \sqrt{q}3$: vel $\sqrt{q}\frac{21}{7}$ eſt $\sqrt{q}3$. Item $\sqrt{q}A$ in $\sqrt{q}E$ eſt $\sqrt{q}AE$. Et $\sqrt{q}A) \sqrt{q}AE ( \sqrt{q}E$: vel $\sqrt{q}\frac{AE}{A}$ eſt $\sqrt{q}E$.

11. Latera verò heterogenea non multiplicantur, vel dividuntur, niſi prius ad idem genus reducuntur. Quod fit dividendo indices utriuſque poteſtatis propoſitæ per maximam ipſorum communem menſuram: & multiplicando tum Indices per alternos quotos: tum ipſas poteſtates in ſpecies alternis quotis cognomines. Ut ſi ad multiplicandum vel dividendum proponantur $\sqrt{qq}10$ & $\sqrt{cc}7$. Primò reducuntur ad $\sqrt{cccc}1000$, & $\sqrt{cccc}49$: cubando 10, & quadrando 7: Tum demùm fiat multiplicatio, vel diviſio. Sic etiam $\sqrt{qq}A$, & $\sqrt{cc}Bq$ reducuntur ad $\sqrt{cccc}Ac$, & $\sqrt{cccc}Bqq$: uti planiùs apparebit per praxim, quæ hic apponitur.

√[12]1000√[12]49 √[12]Ac√[12]Bqq
[2])√[4]10 √[6]7[2])√[4]A √[6]Bq
[2] [3] [2] [3]

Rurſus ſi √c32 duplicandum ſit, vel multiplicandum per 2: pro 2 ſumatur √c8: & per ipſum multiplicetur √c32; fietque √c256 æquivalens bis √c32.

Item ſi dimidiandum ſit √c32, vel dividendum per 2: pro 2 ſumatur √c8: & per ipſum dividatur √c32; orieturque √c$^{12}_{8}$; hoc eſt √c4, æquivalens $\frac{1}{2}$ √c32.

Sic etiam $^{22}_{3}$√qAq, fiet √q$^{484}_{9}$ Aq, hoc eſt $^{22}_{3}$A

12. Si latus poteſtatis multiplicandum ſit ſecundùm exigentiam ſuæ ſpeciei: deleatur nota ſpeciei lateralis: ut Q: √q64, vel C: √c64, eſt 64.

13. Et ſi latus poteſtatis, cujus index eſt numerus compoſitus, multiplicandum ſit ſecundùm exigentiam alterutrius ſpeciei componentis: latus alterius ſpeciei numero ſpeciali ſolùm præfigatur: ut Q: √cc64 eſt √c64 &C. √cc64 eſt √q64. Nam √cc eſt √[2x3]

14. Si magnitudo plurium, nominum, ducatur in ſeipſam cum uno ex ſuis ſignis mutato expurgabitur unum nomen. Ut 3 + √5 + √2 in 3 + √5 - √2, fiet 12 + √180.

## CAP. XVI.

### *De ÆQUATIONE. & de Quæſtionibus per Æquationem ſolvendis.*

1. QUotieſcunque problema aliquod, ſive quæſtio, proponitur: Puta præſtitū eſſe quod poſtulatur: aptâque adhibita ratiocinatione, pro quæſita magnitudine ponatur A, vel alia aliqua vocalis: pro magnitudinibus autem datis conſonantes: quò facilius magnitudines datæ ab incertis dignoſcantur.

2. Deinde magnitudines, tam datæ, quam quæſitæ, ſecundum conditionem quæſtioni convenientem, efformentur atque comparentur, addendo, ſubtrahendo, multiplicando, & dividendo, donec tandem aliquid inveniatur magnitudini, de qua quæritur, vel ſuæ, ad quam aſcendet, poteſtati æquale.

3. Et quia in omni ferè æquatione, ubi primò ex involucris quæſtionis effulget, nota cum ignotis confunduntur: termini ipſius ita ſunt ordinandi, ut quæ in data habentur menſura, faciant unam partem, & quæ ignota quæruntur, alteram. Quod quo artificio fiat, regulæ quinque ſequentes commonſtrabunt.

4. Primò, ſi magnitudo quæſita, vel aliquis ejus gradus, ſit in fractione: fiat omnium magnitudinum ad unam denominationem reductio: ut, omiſſo communi illo denominatore, in ſolis numeratoribus æquatio cenſeatur.

Ut $A-C=\frac{Aq+Bq}{D}+B+C$: Erit $DA-DC=Aq+Bq+DB+DC$.

5. Se-

5. Secundò, ſi quæ in data habentur menſura, immiſceantur cũ quæſitis: *fiat tranſpoſitio magnitudinum ex una parte in aliam ſub contrario ſigno.* Ut DA-DC=Aq+Bq+DB+DC: Et tranſpoſitis DC & Aq, erit DA-Aq=2DC+DB+Bq. Quæ etiã regula in omni tranſpoſitione ſervanda eſt.

6. Tertiò, ſi ſpecies altiſſima quæſitæ magnitudinis ducatur in magnitudinem aliquam datam; fiat omnium magnitudinũ æquationis ad illam communis applicatio. Ut BAq+BqA=Zc, erit Aq+BA=$\frac{Zc}{B}$

7. Quartò, ſi contingat omnes datas magnitudines duci in gradum aliquem magnitudinis quæſitæ: fiat omnium, per applicationem ad minimam ſpeciem, ſecundum ordinem tabellæ, communis depreſſio. Ut Aqq+BAc=ZqAq, erit Aq+BA=Zq, expuncto in ſingulis Aq. Atque hoc modo æquatio quælibet propoſita poterit deprimi, ſive reduci ad minores ſpecies; ſi terminorum omnium fiat ad eundem gradum communis applicatio. Ut Ac+XAq=Nc, diviſa per A, fiet Aq+XA=$\frac{Nc:}{A}$ at diviſa per Aq, fiet A+X=$\frac{Nc}{Aq}$. Quæ quidem operatio in numeroſa affectarum æquationum reſolutione uſus erit non contemnendi: quia latus quæſitum faciliùs æſtimatur in minoribus poteſtatibus, quam in majoribus.

8. Quintò, ſi magnitudo aliqua ſit latus ſurdum: æquatio in ipſis poteſtatibus eſt inſtitu-

enda. Ut $\sqrt{qBA+B}=C$: vel per transpositionem $\sqrt{qBA}=C-B$. Ideoque ipsorum quadrata, $BA=Cq-2CB+Bq$: vel $A=\frac{Cq-2CB+Bq}{B}$.

Item $\sqrt{u:BA+CA:-D}=B$. Vel $\sqrt{u:BA+CA:}=D+B$. Ideoque & ipsorum quadrata $BA+CA=Bq+2BD+Dq$: vel $A=\frac{Bq+2BD+Dq}{B+C}$. Deniq;

$\sqrt{q\frac{A}{3}}=\sqrt{c2A}$: vel per 11 c15, $\sqrt{cc\frac{Ac}{27}}=\sqrt{cc4}$ Aq. Quare $Ac=108Aq$. Et $A=108$.

9. Æquationū, in quibus sunt tres species æqualiter in ordine scalæ ascendentes, constitutio liquebit ex sect. 2,3,4. capitis 11: Nam quia

$Z-A=E$: ducatur utraque pars in A.
$Z-E=A$: ducatur utraque pars in E.
$A-X=E$: ducatur utraque pars in A.
$E+X=A$: ducatur utraque pars in E.

Et similiter fiat in Z & X, &c.

Atque hac multiplicatione hujusmodi orientur æquationes.

| | |
|---|---|
| $ZA-Aq=Æ$ | $Aq-XA=Æ$ |
| $ZAq-Aqq=Æq$ | $Aqq-XAq=Æq$ |
| $ZAc-Acc=Æc$ | $Acc-XAc=Æc$ |
| &c | &c |
| $ZE-Eq=Æ$ | $Eq+XE=Æ$ |
| $ZEq-Eqq=Æq$ | $Eqq+XEq=Æq$ |
| $ZEc-Ecc=Æc$ | $Ecc+XEc=Æc$ |
| &c | &c |

Quotiescunque igitur proponitur Æquatio constans ex tribus speciebus æqualiter in ordine scalæ ascendentibus: Cogitabis magnitu-

tudinem abſolutam datam, eſſe rectangulum ſub duabus magnitudinibus quæſitis, ſive latera ſint, ſive quadrata, ſive cubi, &c. qualis ſcil. eſt poteſtas mediæ ſpeciei. In media autem ſpecie, ſi altiſſima ſpecies ſit negata, coëfficientem eſſe ſummam magnitudinum quæſitarum; Et de utrâque exponi. At ſi altiſſima ſpecies ſit affirmata, coëfficientem eſſe magnitudinum quæſitarum differentiam; ipſam autem ſpeciem exponi de majore, negatam; vel de minore, affirmatam.

Tum datis binarum magnitudinum ſumma & rectangulo, datur earundem differentia: vel data differentia & rectangulo, datur ſumma. Nam per 2 Cap. XI.

$$\left.\begin{array}{l} Q:\frac{1}{2}Z:-Æ=Q:\frac{1}{2}X \\ Q:\frac{1}{2}X:+Æ=Q:\frac{1}{2}Z \end{array}\right\} \text{quare} \left\{\begin{array}{l} \sqrt{u:\frac{1}{4}Zq-Æ:}=\frac{1}{2}X. \\ \sqrt{u:\frac{1}{4}Xq+Æ:}=\frac{1}{2}Z. \end{array}\right.$$

Deniq; datis binarũ magnitudinũ $\frac{1}{2}Z$ & $\frac{1}{2}X$, dantur ipſæ magnitudines; hiſce duabus Regulis.

I Reg. $\frac{1}{2}Z \pm \sqrt{u:\frac{1}{4}Zq-Æ:}(\frac{1}{2}X)=\frac{A.}{E.}$

II Reg. $\sqrt{u:\frac{1}{4}Xq+Æ:}(\frac{1}{2}Z)+\frac{1}{-2}X=\frac{A.}{E.}$

Atque hæ duæ ſunt regulæ pro ſolutione Æquationis cujuſque; in qua ſunt tres ſpecies, æqualiter in ordine ſcalæ aſcendentes.

10. GENESIS ſex Binomiorum ex lateribus ſuis ſurdis. Regula eſt, $Z+2Æ=Zq$. In Apotomis verò, $Z-2Æ=Xq$.

Exempl. I. Quadretur Binomium $4+\sqrt{11}$. Hîc Z eſt $16+11$, hoc eſt 27. Et Æ eſt $\sqrt{16} \times \sqrt{11}$, hoc eſt $\sqrt{176}$: cujus duplum eſt $\sqrt{704}$. Quadratum igitur erit $27+\sqrt{704}$. Quod dicitur Binomium I. Ex-

Exempl. II. Quadretur Bimediale prius, $\sqrt{qq12+\sqrt{qq\ 27/4}}$. Hîc Z eſt $\sqrt{12+\sqrt{27/4}}$, vel $\sqrt{48/4+\sqrt{27/4}}$, hoc eſt $\sqrt{147/4}$, per 7, Cap. XV. Et Æ eſt $\sqrt{qq\ 12\times\sqrt{qq\ 27/4}}$, vel $\sqrt{qq3\times\sqrt{qq27}}$; hoc eſt, $\sqrt{qq81}$, ſcil. 3. cujus duplum eſt 6. Quadratum igitur erit $\sqrt{147/4+6}$: Quod dicitur Binomium II.

Exempl. III. Quadretur Bimediale poſterius $\sqrt{qq\ 80/3+\sqrt{qq15}}$. Hic Z eſt $\sqrt{80/3+\sqrt{15}}$, vel $\sqrt{80/3+\sqrt{45/3}}$; hoc eſt $\sqrt{245/3}$, per 7, Cap. XV. Et Æ eſt $\sqrt{qq\ 80/3\times\sqrt{qq\ 15}}$, vel $\sqrt{qq80\times\sqrt{qq5}}$; hoc eſt $\sqrt{qq400}$, ſcil. $\sqrt{20}$: cujus duplum eſt $\sqrt{80}$. Quadratum igitur erit $\sqrt{245/3+\sqrt{80}}$. Quod dicitur Binomium III.

In tribus reliquis, quæ conſtant ex radicibus Binomii & Reſidui connexis, ut $\sqrt{b}$: A+E: pl $\sqrt{r}$: A-E: perſpicuum eſt Z eſſe 2A: & Æ eſſe $\sqrt{}$: Aq-Eq: quare

Exempl. IV. Quadretur Major, $\sqrt{b}$: $7/2+\sqrt{29/4}$ pl $\sqrt{r}$: $7/2-\sqrt{29/4}$. Hîc Z eſt $7/2+7/2$, hoc eſt, 7. & Æ eſt $\sqrt{u}$: $49/4-29/4$: hoc eſt, $\sqrt{20/4}$, ſcil. $\sqrt{5}$: cujus duplum eſt $\sqrt{20}$. Quadratum igitur erit $7+\sqrt{20}$. Quod dicitur Binomium IV.

Exempl. V. Quadretur Potens rationale cum mediali, $\sqrt{b}$: $\sqrt{5}+1$: pl $\sqrt{r}$: $\sqrt{5}-1$. Hîc Z eſt $\sqrt{5}+\sqrt{5}$; hoc eſt, $\sqrt{20}$. Et Æ eſt $\sqrt{}$: 5-1: hoc eſt, $\sqrt{4}$, ſcil. 2 cujus duplum eſt 4. Quadratum igitur erit $\sqrt{20}+4$. Quod dicitur Binomium V.

Exempl. VI. Quadretur Potens duo media-lia, $\sqrt{b}$: $\sqrt{5}+\sqrt{3}$: pl $\sqrt{r}$: $\sqrt{5}-\sqrt{3}$. Hîc Z eſt $\sqrt{5}+\sqrt{5}$, hoc eſt, $\sqrt{20}$. Et Æ eſt $\sqrt{}$: 5-3: hoc eſt, $\sqrt{2}$: cujus duplum eſt $\sqrt{8}$. Quadratum igitur erit $\sqrt{20}+\sqrt{8}$. Quod dicitur Binomium VI.

11. ANALYSIS. In Binomio igitur quadratico, majus nomen eſt Z: & minus nomen 2Æ. At in 2 Cap. XI. ordinatum eſt, $\frac{1}{4}Zq - Æ = \frac{1}{4}Xq$: ſcil. $\frac{1}{4}Q:A+E:-Æ = \frac{1}{4}Q:A-E$. Quare ſi pro A & E ſumantur ipſarum quadrata Aq & Eq, erit $\frac{1}{4}Q:Aq+Eq:-AqEq = \frac{1}{4}Q:Aq-Eq$: hoc eſt, $\frac{1}{4}Zq - Æq = \frac{1}{4}Xq$, ex quo Theoremate pro Analyſi Binomii deducitur hæc Regula.

$$\tfrac{1}{2}Z \pm \sqrt{q:\tfrac{1}{4}Zq - Æq:(\tfrac{1}{2}X.) = \frac{Aq.}{Eq.}}$$

Exempl. I. Quæratur latus Binomii I, $27+\sqrt{704}$: nempe $Z+2Æ$. Quare $\frac{1}{2}Z$ eſt $27\frac{1}{2}$: & Æ eſt $\sqrt{\frac{729}{4}}$: & $\frac{1}{4}Zq - Æq$ eſt $\frac{729}{4} - \frac{729}{4}$; hoc eſt, $\frac{25}{4}$: cujus latus $\frac{1}{2}$ eſt $\frac{1}{2}X$. At per Reg. $\frac{27 \pm 5}{2} = \begin{matrix} 16. \\ 11. \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ \sqrt{11} \end{matrix}$ Latus igitur quæſitū eſt $4+\sqrt{11}$. Et dicitur Binomiū I.

Exempl. II. Quæratur latus Binomii II, $\sqrt{\frac{147}{4}}+6$: nempe $Z+2Æ$. Quare $\frac{1}{2}Z$ eſt $\sqrt{\frac{147}{16}}$: Et Æ eſt 3. & $\frac{1}{4}Zq - Æq$ eſt $\frac{147}{16} - (9) \frac{144}{16}$; hoc eſt $\frac{3}{16}$: cujus latus $\sqrt{\frac{3}{16}}$ eſt $\frac{1}{2}X$. At per Reg. $\sqrt{\frac{147}{16}} \pm \sqrt{\frac{3}{16}} = \begin{matrix} \sqrt{12}. \sqrt{qq12} \\ \sqrt{\frac{27}{4}}. \sqrt{qq\frac{27}{4}} \end{matrix}$ Latus igitur quæſitum eſt $\sqrt{qq12}+\sqrt{qq\frac{27}{4}}$. Et dicitur Bimediale prius.

Exempl. III. Quæratur latus Binomii III, $\sqrt{\frac{245}{3}}+\sqrt{80}$: nempe $Z+2Æ$. Quare $\frac{1}{2}Z$ eſt $\sqrt{\frac{245}{12}}$: & Æ eſt $\sqrt{20}$. & $\frac{1}{4}Zq - Æq$ eſt $\frac{245}{12} - (20) \frac{240}{12}$; hoc eſt $\frac{5}{12}$: cujus latus $\sqrt{\frac{5}{12}}$ eſt $\frac{1}{2}X$. At per Regul. $\sqrt{\frac{245}{12}} \pm \sqrt{\frac{5}{12}} = \begin{matrix} \sqrt{\frac{80}{3}}. \sqrt{qq\frac{80}{3}} \\ \sqrt{15}. \sqrt{qq15} \end{matrix}$ Latus igitur quæſitum eſt $\sqrt{qq\frac{80}{3}}+\sqrt{qq15}$. Et dicitur Bimediale poſterius.

Exempl. IV. Quæratur latus Binomii IV, $7+\sqrt{20}$; nempe $Z+2Æ$. Quare $\frac{1}{2}Z$ eſt $\frac{7}{2}$: & Æ eſt $\sqrt{5}$: & $\frac{1}{4}Zq - Æq$ eſt $\frac{49}{4} - (5) \frac{20}{4}$; hoc eſt; $\frac{29}{4}$: cujus

latus $\sqrt{\frac{29}{4}}$ eſt $\frac{1}{2}$X. At per Regul. $\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{29}{4}}.\sqrt{b}:\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{29}{4}}$ } Latus igitur quæſitum eſt $\sqrt{b}:\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{29}{4}}.\sqrt{r}:\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{29}{4}}$ } $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{29}{4}}$ pl $\sqrt{r}:\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{29}{4}}$: & dicitur Major

Exempl. V. Quæratur latus Binomii V, $\sqrt{20} + 4$: nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}\sqrt{20}$ eſt $\sqrt{5}$: & Æ eſt 2: & $\frac{1}{4}$Zq-Æq eſt 5-4; hoc eſt 1, cujus latus 1 eſt $\frac{1}{2}$X. At per Reg. $\sqrt{5} \pm 1 = \sqrt{5}+1.\sqrt{b}:\sqrt{5}+1$ } Latus igitur quæſitū eſt $\sqrt{b}:\sqrt{5}+1$ } $\sqrt{5}-1.\sqrt{r}:\sqrt{5}-1$ } pl $\sqrt{r}:\sqrt{5}-1$, Et dicitur Potens rationale cum mediali.

Exempl. VI. Quæratur latus Binomii VI, $\sqrt{20} + \sqrt{8}$: nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}$Z eſt $\sqrt{5}$: & Æ eſt $\sqrt{2}$: Et $\frac{1}{4}$Zq-Æq eſt 5-2; hoc eſt 3. cujus latus $\sqrt{3}$ eſt $\frac{1}{2}$X. At per Reg. $\sqrt{5} \pm \sqrt{3} = \sqrt{5}+\sqrt{3}.\sqrt{b}:\sqrt{5}+\sqrt{3}.$ } Latus igitur quæſitum eſt $\sqrt{5}-\sqrt{3}.\sqrt{r}:\sqrt{5}-\sqrt{3}.$ } $\sqrt{b}:\sqrt{5}+\sqrt{3}$: pl $\sqrt{r}:\sqrt{5}-\sqrt{3}$. Et dicitur Potens duo medialia.

12. Atque hîc obiter trianguli rectanguli plani Geneſis ſe offert. Quia Zq=Xq+4AE, nempe Hq=Bq+Cq. per 47e1: Propoſitis binis quibuſcunque lineis ſive numeris A&E, trianguli rectanguli latera erunt, A+E, A-E, $\sqrt{4AE}$: vel etiam (mutatis A&E in Aq&Eq) Aq+Eq. Aq-Eq. 2AE, (ſcil. $\sqrt{4AqEq}$.) Ut ſi proponantur duo numeri 2&1: latera erunt 3, 1, $\sqrt{8}$: nempe 2+1, 2-1, $\sqrt{4\times2\times1}$. vel etiam 5, 3, 4: nempe 4+1, 4-1, 2x1 bis.

13. Datis binis triangulis, rectangulis, H, B, C: & h, b, c: tertium ex ipſis fabricare: idque dupliciter,

I. Quia Bq=Hq-Cq } Multiplicentur invicē;
Et bq=hq-cq }

Eritque,

Eritque B qbq=Hqhq+Cqcq mi Hqcq+Cqhq.
At Hqhq+Cqcq+2Hchc=Q:Hh+Cc:
Et Hqcq+Cqhq+2HChc=Q:Hc+Ch:
Subducatur unũ quadratum ex altero: & erit,
Bqbq=Q: Hh+ Cc: mi Q: Hc+Ch:
Et ſic inventum eſt ex his triangulum tertium,
Bb. Hh+Cc. Hc+Ch. Hæc Regula ſit I.

Enunciatur autem verbis ſic. Pro trianguli novi baſe, ſumatur rectangulum ſub baſibus: Pro hypotenuſa, rectangulum ſub hypotenuſis auctum rectangulo ſub cathetis. Pro catheto, rectangulum ſub hypotenuſa primi & catheto ſecundi, auctum rectangulo ſub catheto primi & hypotenuſa ſecundi.

II. Quia Hq=Bq+Cq
Et hq=bq+cq } Multiplicentur invicẽ
Eritque Hqhq=Bqbq+Cqcq pl. Bqcq+Cqbq.
At Bqbq+Cqcq-2BCbc=Q: Bb-Cc:
Et Bqcq+Cqbq+2BCbc=Q: Bc+Cb:
Addantur hæc duo quadrata: & erit
Hqhq=Q: Bq-Cc: pl. Q: Bc+Cb.
Et ſic inventũ eſt ex his triangulum tertium,
Hh. Bb-Cc. Bc+Cb. Hæc Regula ſit II.

Enunciatur autem verbis ſic. Pro trianguli novi hypotenuſa, ſumatur rectangulum ſub hypotenuſis. Pro baſe, rectangulum ſub baſibus minutum rectangulo ſub cathetis. Pro catheto, rectangulum ſub baſe primi & catheto ſecundi, auctum rectangulo ſub catheto primi & baſe ſecundi.

14. Si trianguli rectanguli latera continuè multiplicentur juxta binas regulas modò inventas: Prima multiplicatio triangulum pro-

ducet bicompoſitum: ſecunda tricompoſitum: tertia quadricompoſitum: & ſic ulterius.

Exempl. Reg. I. Bb. Hh+Cc. Hc+Ch.

B. H. C. trianguli ſimpli.
B. H. C.

Bq. Hq+Cq. 2 HC. triang. bicompoſit.
B . H . C

Bc. Hc+HCq. 2HqC
2HCq. HqC+Cc.

Bc . Hc+3HCq. 3HqC+Cc. tri compoſit.
B . H . C

Bqq. Hqq+3HqCq. 3HcC+HCc
Cqq+3HqCq. HcC+3HCc.

Bqq . Hqq+6HqCq+Cqq . 4HcC+4HCc.
B . H . C (quadricomp.
&c.

Exempl. Reg. II. Hh. Bb-Cc. Bc+Cb.

H. B. C. trianguli ſimpli.
H. B. C.

Hq. Bq-Cq. 2BC: triang. bicompoſit.
H . B . C.

Hc . Bc-BCq. 2BqC
—2BCq. BqC-Cc

Hc . Bc-3BCq. 3BqC-Cc: tri-compoſit.
H . B . C

Hqq . Bqq-3BqCq. 3BcC-BCc
Cqq-3BqCq. BcC-3BCc

Hqq . Bqq-6BqCq+Cqq . 4BcC—4BCc.
H . B . C (quadri comp.
&c.

CAP.

## CAP. XVII.

*Alia tabulæ posterioris in Cap. 12. inspectio, quoad Æquationes.*

1. A Binomia radice A+E, potestatum species omnes sunt affirmatæ. A Residuo verò potestatū species omnes sunt alternatim negatæ, ut Q: A-E: est Aq--2AE+Eq. Et C: A-E: est Ac -3AqE+3AEq-Ec. Et QQ: A-E: est Aqq-4AcE+ 6AqEq-4AEc+Eqq. &c. Adeò ut si potestatis cujusvis species alternatim sumptæ, in duas summas aggregentur: harum summarum connexio cum signo radicis, erit radicis ipsius potestas. Atque hæc est Binomiorum, ac Residuorum, Quadraticorum, Cubicorum, aliorumque constitutio.

2. Quare nominum Binomii, vel Residui cujusque differentia, est homogenea potestas differentiæ nominum radicis. scil. Ac+3AEq mi 3AqE+Ec, vel Ac+3AEq-3AqE-Ec, est C: A-E.

3. Et Quadratorum è nominibus Binomii vel Residui cujusq; differentia, est homogenea potestas differentiæ quadratorum è nominibus radicis. scil. Q: Ac+3AEq: mi Q: 3AqE+Ec est C: Aq-Eq.

Nam per exempl. Reg. I, in 14, Cap. XVI, si cogitetur A hypotenusa trianguli rectanguli; & E cathetus; & Aq-Eq quadratum basis; hoc Theorema aliter symbolis explicabitur sic: Q: Hc+3HCq: mi Q: 3HqC+Cc:=C: Bq:= Q:Bc: ergo.

4. At si species in nominibus aggregatæ, ipsæ etiam alternatim adfirmentur, & negentur:

Qua-

Quadratorum è nominibus ſumma, eſt homogenea poteſtas ſummæ quadratorum è nominibus radicis. Scil. Q: Ac-3AEq.pl. Q: 3AqE-Ec: eſt C: Aq+Eq.

Nam per exempl. Reg. II, in 14, Cap. XVI, ſi cogitetur A baſis trianguli rectanguli ; & E cathetus ; & Aq+Eq quadratum hypotenuſæ ; hoc Theorema aliter ſymbolis explicabitur ſic: Q: Bc-3BCq: pl Q: 3BqC-Cc:=C:Hq:=Q: Hc. ergo

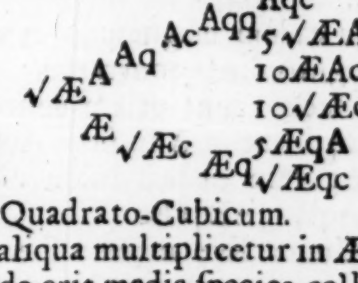
5. Omnes cujuſque ordinis intermediæ ſpecies, ſunt etiam poteſtates mediorum inter A & E proportionalium. ſcil. inter Ac & Ec, ſunt duæ mediæ proportionales, AqE & AEq: qui etiam cubi ſunt ex M & N. Quare A, √c AqE, √cAEq, E, ſunt continuè proportionales : nempe A, M, N, E. Nam AqE=AMN =Mc: & AEq=MNE=Nc. Atque hinc patet inventio quotlibet mediorum proportionalium inter A & E : ut ſi velis quinque medios proportionales, poteſtates erunt [6] ſive cc, quarum Index unitate excedit numerum quæſitorum mediorum: Eruntque A, √cc AqcE, √ccAqqEq, √ccAcEc, √ccAqEqq, √cc AEqc, E, ÷

6. Omnis media ſpecies in unoquoque genere, fit ex duabus nominum radicis poteſtatibus, quarum Indices ſimul, æquales ſunt Indici ejuſdem generis : mediæ autem ipſius ſpeciei ab extremis ſuis diſtantiæ, æquales erunt Indicibus alternarum facientium : & facientibus ſuis in communi angulo reſpondent. Scil. AqEc generis quadrato-cubici, fit ex Aq

in

in Ec, quibus in communi angulo reſpondent. Eſtque ab Aqc tertia: & ab Eqc ſecunda.

*Conſect.* Atque hinc facile erit radicis Binomiæ datæ poteſtates quamlibet (inventis omnibus mediis inter poteſtates nominum extremas) conſtruere. Ut in exemplo, ſi radicis Binomiæ A+√Æ quæratur Quadrato Cubus: erit Aqc+ 10 ÆAc+ 5 ÆqA plus 5 √ÆAqcc+ 10√ÆcAqq+ √Æqc: Quod Binomium eſt Quadrato-Cubicum.




7. Si ſpecies aliqua multiplicetur in Æ, producta magnitudo erit media ſpecies collateralis, in ordine alternè ſequente, atq; eadem numero à ſuis extremis. Ut Ac×Æ, eſt AqqE, quæ prima eſt ab Aqc, & quarta ab Eqc. Sic AcE×Æ, eſt Aqq Eq, quæ ab Acc ſecunda eſt, & ab Ecc quarta. Et ſimiliter de reliquis.

8. Si ſpecies aliqua multiplicetur per A--E vel X, producta magnitudo erit differentia inter duas ſpecies ordinis ſequentis utrinque proximas. Ut AcX=Aqq−AcE. AqEX =AcE−AqEq. AEqX=AqEq−AEc. EcX= AEc−Eqq. Quare

Si omnes cujuſvis ordinis ſpecies multiplicentur per X, producetur differentia duarum poteſtatum extremarum ordinis proximi ſuperioris. Ut ex Ac+AqE+AEq+Ec, ductus in X, fiet Aqq-Eqq.

9. In ordinibus Indicum imparium (l,c,qc, &c.)

&c.) ſumma duarum extremarum poteſtatum; at in ordinibus Indicum parium (q, qq, cc, &c.) differentia earundem; fit ex A+E ducta in ſingulas ſpecies ordinis minoris præcedentis, alternatim adfirmatas & negatas. Ut Ac+Ec, fit ex Aq—AE+Eq, ductis in A+E. Item Aqq-Eqq, fit ex Ac-AqE+AEq-Ec, ductis in A+E.

10. Si eadem magnitudo multiplicetur in duas magnitudines contrarias: magnitudines ex ipſis factæ erunt etiam contrariæ. Ut Aq -2AE+Eq ductæ in A-E, fient Ac--3AqE+3AEq --Ec. At vero eædem ductæ in --A+E, fient --Ac+3AqE--3AEq+Ec.

11 Unciæ ſive numeri ſpeciebus præfixi, ſunt figuræ numerariæ. Nam omnes ſub A & E, ſunt radices. Omnes ſub Aq & Eq, ſunt triangulares. Omnes ſub Ac & Ec, ſunt pyramidales. Omnes ſub Aqq & Eqq, ſunt triangulo-triangulares. Omnes ſub Aqc & Eqc, ſunt triangulo-pyramidales. Omnes ſub Acc & Ecc, ſunt pyramidi-pyramidales, &c.

12. Si radix tribus cõſtet nominibus, A, E, I,

Quadratum: Aq, 2AE, Eq, 2EI, Iq, 2AI,

Cubus: Ac, Ec, Ic, 3AqE, 3AEq: 3AqI, 3AIq, 3EqI, 3EIq, 6AEI.

Et nota quòd ſi in aliqua ſpecie, numerus laterum negatorum ſit impar; ſpecies illa erit negata. Ut Q:A+E-I:=Aq+2AE+Eq-2EI+Iq -2AI. Et C: A+E-I: =Ac+3AqE+3AEq+Ec -3EqI+3EIq-Ic-3AqI+3AIq-6AEI.

CAP.

## CAP. XVIII.

### *Penus Analytica.*

1. EX primis ac facillimis æquationibus, quæ nihil aliud ſunt, quàm vel terminorum expoſitiones, vel ſimplices affectiones (quales ſunt illæ capitis XI, $\frac{1}{4}Z \cdot E = \frac{1}{2}X$: & $\frac{1}{2}X + E = \frac{1}{2}Z$: & reliquæ ejuſmodi) innumeri aliæ deducuntur, per Additionem, Subductionem, Multiplicationem, Diviſionem, Tranſpoſitionem, atque Interpretationem: ſumendo id quod alteri inventum eſt æquale, loco ejus cui æquatur. Quæ quidam Analytica ſupellex eſt, non minùs pretioſa, quàm copioſa. Quarum ergo præcipuas aliquot, & maximè neceſſarias, adſcribam: plures Analytices ſtudioſus pro ſuo exercitio excogitabit. Et ubicunque ſive in Arithmetica, ſive in Geometria, ſive in alia aliqua arte, inciderit in magnitudinem aliquam, cui alteri æqualis eſſe intelligitur; æqualitatem illam quibuſcunque poterit modis atque comparationibus, torquebit, diſcutiet, variabit, ut novum inde artis inſtrumentum inveniat: quod poſtea in penu ſervabit: & ubicunque poterit in uſum proferet, ad artis ſubſidium atque augmentum.

| | |
|---|---|
| $Q:1 := 9Q:\frac{1}{3}$. &c. | $C:1 := 27C:\frac{1}{3}$: &c. |
| $Q:1 := \frac{1}{9}Q:3$. &c. | $C:1 := \frac{1}{27}C:3$: &c. |
| $Q:1 := \frac{9}{4}Q:\frac{2}{3}$ &c. | $C:1 := \frac{27}{8}C:\frac{2}{3}$ &c. |
| $\frac{2}{5}Q:1 := \frac{2}{5}\times\frac{9}{4}Q:\frac{2}{3}$: &c. | $\frac{2}{5}C:1 := \frac{2}{5}\times\frac{27}{8}C:\frac{2}{3}$. &c. |
| $\frac{2}{3}Q:4 := \frac{2\times16}{3}Q:1$ &c. | $\frac{2}{3}C:4 := \frac{2\times64}{3}C:1$: &c |

3. Si

3. Si linea biſecetur, & ſecùs; rectangulum ſub ſegmentis inæqualibus, æquatur differentiæ quadratorum biſegmenti atque interſegmenti: hoc eſt ſemiſummæ atque ſemidifferentiæ ſegmentorum. 5 e 2. AE=Q:½A +½E:mi Q:½A-½E: Et hoc eſt, AE=¼Zq-¼Xq.

4. Si linea biſecta augeatur; rectangulum ſub tota aucta & augmento, æquatur differentiæ quadratorum biſegmenti aucti, atque biſegmenti. 6 e 2. A+E in E=Q:½A+E: mi Q:½A. Et A+E in A=Q: ½ E+A: mi Q:½E.

Datis igitur ſumma trium ∴ (Aq+AE+Eq) cum alterutro extremorum, dantur duo reliqui. Sic

√u:Aq+Æ+Eq-¼Aq: mi ½A=E.

√u:Aq+Æ+Eq-¼Eq:mi½E=A.

Nam Q:½A+E:=¼Aq+AE+Eq.

Et Q:½E+A:=Aq+AE+¾Eq.

5. Si linea ſecetur utcunque; ſumma quadratorum totius, & unius ſegmenti, æquatur aggregato quadrati alterius ſegmenti, & duplicis rectanguli ſub tota & priore ſegmento, 7 e 2. Zq+Aq=2ZA+Eq. Et Zq+Eq=2ZE +Aq. Quare 2ZA + Eq-Aq=Zq=2ZE+Aq -Eq.

6. Si linea utcunque ſecta, augeatur alterutro ſegmento; Quadruplex rectangulum ſub ſecta, & ſegmento augente, æquatur differentiæ quadratorum totius auctæ, & alterius ſegmenti. 8 e 2.

Q:Z+E:-Aq=4ZE. Et Q:Z+A:-Eq=4ZA.

7. Si linea biſecetur, & ſecus; ſumma qua-

quadratorum ſegmentorum inæqualium, æquatur duplicatæ ſummæ quadratorum biſegmenti, & interſegmenti 9 e 2. $Aq+Eq=2Q:\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E:+2Q:\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E.$

8. Si linea biſecta augeatur; ſumma quadratorum totius auctæ & augmenti, æquatur duplicatæ ſummæ quadratorum biſegmenti aucti, & biſegmenti. 10 e 2.

$Q:A+E:+Eq=2Q:\frac{1}{2}A+E:+2Q:\frac{1}{2}A.$
$Q:A+E:+Aq=2Q:\frac{1}{2}E+A:+2Q:\frac{1}{2}E.$

9. $Aq=ZA-AE=XA+AE=\frac{1}{2}ZA+\frac{1}{2}XA=Q:Z-E:=Q:E+X:=Z-Eq=Eq+X.$
Et $Eq=ZE-AE=AE-XE=\frac{1}{2}ZE-\frac{1}{2}XE=Q:Z-A:=Q:A-X:=Z-Aq=Aq-X.$

10. $Æ=\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Xq=ZA-Aq=ZE-Eq=Aq-XA=Eq+XE=\frac{1}{2}Zq-\frac{1}{2}Z=\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}Xq=\frac{1}{2}ZA-\frac{1}{2}XA=\frac{1}{2}ZE+\frac{1}{2}XE.$

11. $Z=Aq+Eq=Zq-2AE=2AE+Xq=ZE+XA=ZA-XE=2Q:\frac{1}{2}Z:+2Q:\frac{1}{2}Z-E:=Q:A-2N:+Q:2M-E:=\frac{1}{2}Zq+\frac{1}{2}Xq=2Q:\frac{1}{2}Z:+2Q:\frac{1}{2}X:$
Conſectarium ex his duabus ultimis æquationibus: Si magnitudo conſtet ex quadratis binarum magnitudinum; ejus etiam duplum conſtabit ex duobus quadratis, Summæ ſcil. & Differentiæ: Et dimidium ejus conſtabit ex duobus quadratis, Semiſummæ ſcil. & Semidifferentiæ.

Et $X=Aq-Eq=ZX=2ZA-Zq=Zq-2ZE=2XA-Xq=2XE+Xq=ZA-ZE=XA+XE=Zq-2ZE=ZA+XE-2Æ=XA+2Æ-ZE=Q:A+2N:$ mi $Q:2M+E.$

12. Q;

12. $Q:\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E:=Q:\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E:+Æ.$ } Nam $\frac{1}{4}Zq$
Et $Q:\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E:=Q:\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E:-Æ.$ } $=\frac{1}{4}Xq+Æ.$

13. $2A+2E$ in $A=2Aq+2AE=Zq+X.$
Et $2A-2E$ in $A=2Aq-2AE=X+Xq.$
Et $2A+2E$ in $E=2AE+2Eq=Zq-X.$
Et $2A-2E$ in $E=2AE-2Eq=X-Xq.$

14. $Xq=Zq Xq=Z+2Æ$ in $Z-2Æ=Zq-4AqEq.$

15. $ZÆ=AqE+AEq.$ Et $XÆ=AqE-AEq.$
Et $ZÆ=AcE+AEc.$ Et $XÆ=AcE-AEc.$

Quare $Z+3ZÆ=Zc.$ Et $X-3XÆ=Xc.$
Et $ZZ=Z+ZÆ=Ac+AqE+AEq+Ec.$
Et $ZX=X-XÆ=Ac-AqE+AEq-Ec.$
Et $XZ=X+XÆ=Ac+AqE-AEq-Ec.$
Et $XX=Z-ZÆ=Ac-AqE-AEq+Ec.$

Hinc $ZZ+XX=2Z.$ Et $XZ+ZX=2X.$
Et $ZZ-XX=2ZÆ.$ Et $XZ-ZX=2XÆ.$

16. Si in circulo ſit $7.22::ſ.\pi::113.355$: erit
$ſ.\pi::2R.P$: periph. Et $\pi.ſ::\frac{1}{2}P.R$: ſemidiam.
$ſ.\pi::Rq.$ Circul. Et $\pi.ſ::\frac{1}{4}Pq.$ Circul.
$ſ.\pi::2Rc.$ Cylind. Et $\pi q.ſq::\frac{1}{4}Pc.$ Cylind.
$ſ.\pi::\frac{4}{3}Rc.$ Sphær. Et $\pi q.ſq::\frac{1}{6}Pc.$ Sphær.
$ſ.\pi::\frac{2}{3}Rc.$ Con. Et $\pi q.ſq::\frac{1}{12}Pc.$ Con.

17. Ad hæc oportet futurum Analyſtam Geometrica iſta, tum theoremata, tum problemata non ignorare.

Theor. 1. Triangula ſunt æqualia: Si in utroque, vel tria latera; vel duo latera cum angulo comprehenſo; vel duo latera cum angulo eidem lateri oppoſito, modo angulus reliquo lateri oppoſitus ſit homogeneus; vel duo anguli cum latere interjacente; vel duo anguli cum latere eidem ſubtenſo; æquentur. 4, 8, 26, e 1.

Theor.

Theor. 2. Triangula plana ſunt ſimilia: Si vel ſint æquiangula; vel lateribus omnibus proportionalia; vel habeant unum angulum æqualem, & alterum angulum crurum proportionalium, & angulum tertium homogeneum. 4, 5, 6, 7, e 6.

Theor. 3. In omni triangulo, majus latus majorem angulum ſubtendit; & minus minorem; & æquale æqualem. 18, 19, e 1.

Theor. 4. Duæ rectæ lineæ ſunt parallelæ: Si recta ipſas ſecans æquales fecerit, vel angulos alternos; vel externum & internum oppoſitum; vel duos internos ex eâdem parte duobus rectis. Et contra. 27, 28, 29, 30, e 1. Nam lineæ rectæ parallelæ ſunt inſtar unius lineæ latæ.

Theor. 5. Trianguli tres anguli ſimul, æquantur duobus rectis: Et externus angulus duobus internis oppoſitis. 32 e 1.

Theor. 6. Si rectam in circulo inſcriptam, recta è centro biſecet: ad angulos rectos ipſam ſecat. 3 e 3.

Theor. 7. Perpendicularis ſuper finem diametri, circulum tangit. 16, 18, 19, e 3.

Theor. 8. Angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam. 20 e 3.

Theor. 9. In eodem, vel æqualibus circulis, anguli ſuper æqualibus peripheriis, ſunt æquales. 21 e 3.

Theor. 10. Angulus in ſemicirculo eſt rectus 31 e 3.

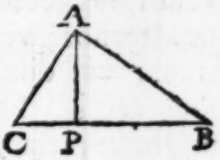
Theor. 11. Si è puncto in peripheria circuli

culi ducantur binæ rectæ lineæ, una circulum tangens, altera ſecans: anguli inter ipſas comprehenſi menſura, æqualis erit ſemiperipheriæ abſciſſæ. pro 32 e 3.

Theor. 12. Triangula, ſive parallelogramma, æquialta, vel inter eaſdem parallelas, ſunt ut baſes. 35, 36, 37, 38, e 1. & 1 e 6.

Theor. 13. Recta biſecans angulum trianguli, ſecat baſem ratione crurum 3 e 6.

Theor. 14. Triangulum rectangulum quodvis notetur literis A B C: ſic ut A ſit angulus rectus: & BA Baſis: & CA Cathetus: BC Hypotenuſa.




Theor. 15. In triangulo rectangulo plano, perpendicularis ex angulo recto in Hypotenuſã, dividit triangulum in duo triangula, tum toti, tum ſibi ipſis ſimilia. 8 e 6.

BC. BA. CA:: BA. BP. AP:: CA. AP. CP.
Hypotenuſæ Baſes Catheti.

Unde ſequitur.

1° Perpendicularem eſſe mediam proportionalem inter ſegmenta Hypotenuſæ. Ideoque Quadratum perpendicularis æquale eſſe rectangulo ſub ſegmentis.

Scil. ∴ BP, AP, CP. Et APq=BP×CP.

2° Baſem eſſe mediam proportionalem inter Hypotenuſam, & ſegmentum Hypotenuſæ Baſi conterminum. Scil. ∴ BC, BA, BP.

3° Cathetum eſſe mediam proportionalem inter Hypotenuſam, & ſegmentum Hypotenuſæ Catheto conterminum. Scil. ∴ BC, CA, CP.

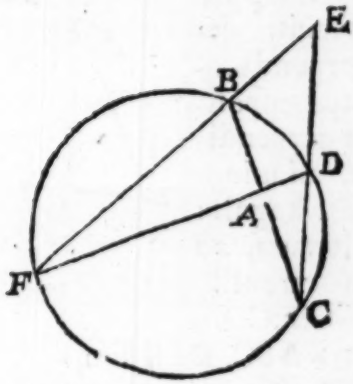
4° Ba-

4° Baſis & Catheti quadrata, eſſe ut ſegmenta Hypotenuſæ contermina. BP. CP:: BAq. CAq. Nam BP. CP:: BC×BP. BC×CP::BAq. CAq.

5° Quadratum Hypotenuſæ æquari quadratis Baſis & Catheti ſimul. BCq=BAq+ CAq. Nam BCq=BC×BP+BC×CP=BAq+CAq.

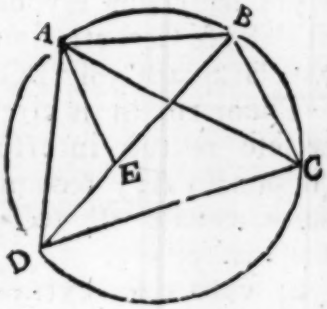
Theor.16. Si in circulo duæ rectæ inſcriptæ ſeſe mutuò interſecent intra circulum (in puncto A;) rectangulum ſub ſegmentis unius, æquale eſt rectangulo ſub ſegmentis alterius. 35 e 3.

Si verò ſeſe extra circulum interſecent (in puncto E) Rectangula ſub ſegmentis utriuſque à puncto ad convexum & concavum circuli, ſunt æqualia. 36 & 37 e 3. Dico primò AB× AC=AD×AF. Nam tri. BAF, DAC ſim. Dico ſecundo EB×EF=ED×EC. Nam tri. BEC, BEF ſim.



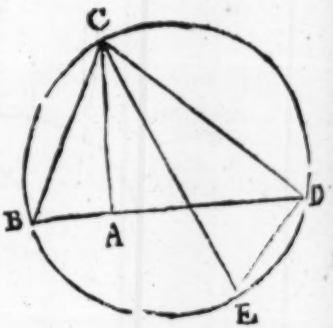

Theor.17.

Theor. 17. Quadrilateri in circulo inſcripti anguli interiores oppoſiti ſimul æquantur duobus rectis, 22 e 3. Et ſi ducantur duo diagonii, rectangulum ſub diagoniis, æquale erit duobus rectangulis ſub lateribus oppoſitis. Dico AC×BD = AB×CD + AD×BC. Nam ſumpto ang. DAE = CAB; erunt tri. ACB, ADE ſim. & ADC, AEB ſim.




Quare { AC. CB :: AD. DE } ergo.
{ AC. CD :: AB. BE }

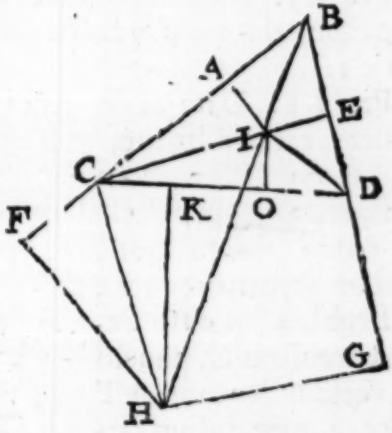
Theor. 18. Si ex angulo quovis trianguli circulo inſcripti, demittatur perpendicularis in latus oppoſitum: Erit ut perpendicularis illa, ad unum crus ejuſdem anguli: ſic crus alterum, ad diametrum circuli. Dico CA. CB :: CD. CE. Nam tri. ABC, DCE ſim.




Theor. 19. Triangula unum angulum æqualem habentia, rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur. 23 e 6.

Theor.

Theor. 20. Si ſemiſumma trium laterum trianguli plani, & tres differentiæ trium laterum ab illa ſemiſumma, continuè inter ſe multiplicentur: Vel aliter, ſi trianguli quovis latere ſumpto pro baſe, & reliquis duobus pro cruribus; Rectangulum ſub ſemiſumma & ſemidifferentia ſummæ crurum & baſis, ducatur in rectangulum ſub ſemiſumma & ſemidifferentia baſis & differentiæ crurum: Facti latus quadratum æquale erit areæ trianguli. Eſto triangulum BCD, cujus crura ſint BC & BD, & baſis CD. Biſecentur tres anguli rectis BI, CI, DI, concurrentibus in I: unde in latera ad angulos rectos ducantur, IA, IE, IO. Sunt igitur intra triangulum BCD, tria paria triangulorum æqualium. Quare ſi cruri BC adjungantur in directum, CF=DE; erit BF=$\frac{1}{2}$BC+$\frac{1}{2}$BD+$\frac{1}{2}$CD:




Et BA=BF-CD=$\frac{1}{2}$BC+$\frac{1}{2}$BD-$\frac{1}{2}$CD:
Et AC=BF-BD=$\frac{1}{2}$CD+$\frac{1}{2}$BC-$\frac{1}{2}$BD:
Et CF=BF-BC=$\frac{1}{2}$CD-$\frac{1}{2}$BC+$\frac{1}{2}$BD. Menſuratis BG=BF: & CK=CF: ducantur perpendiculares FH, GH, KH: Et protrahatur BI in H.

Quia

Quia ang. FCK+FHK=2Rect=FCK+ACO. Et ang: ACO+AIO=2 Rect: Erunt quadrangula FCKH,AIOC ſim. Et tri. CFH,IAC ſim. Sunt etiam tri BAI, BFH ſim. His expoſitis, Dico Quadratum areæ trianguli, nempe BFq× IAq=BF×BA×AC×CF.

Nam IA. BA::FH.BF
Et IA.AC::CF.FH } propter tri: ſim.

Quare per multipl. IAq×BF=BA×AC×CF.

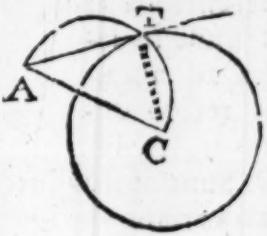
Ducatur utraque pars in BF, eritque &c.

Probl. 1. A dato puncto, vel ad datam diſtantiam, datæ rectæ lineæ parallelam ducere. 31e1.

Probl. 2. Data recta linea, à dato in ea puncto, rectam lineam perpendicularem, ſive ad angulos rectos, excitare. 11e1.

Probl. 3. Super datam rectam lineam, à dato extra ipſam puncto, perpendicularem rectam demittere. 12e1.

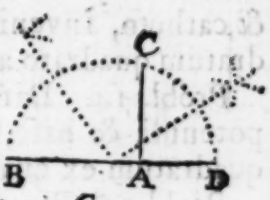
Probl. 4. A dato extra circulum C, puncto A, rectam lineam AT ducere, quæ ipſum circulum tangat. 17e3.




Probl. 5. Tribus rectis lineis datis, quartam proportionalem adinvenire. 12e6.

Probl. 6.

Probl. 6. Datis duabus rectis lineis AB, AD, mediam continuè proportionalem AC adinvenire. 13 e 6.

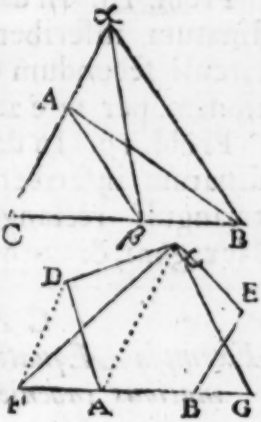



Probl. 7. Datis duabus rectis lineis AB, AC, vel AD, AC, tertiam continuè proportionalem AD, vel AB, adinvenire. 11 e 6.

Probl. 8. Dato triangulo, cujus altitudo eſt AC, & ſemibaſis AB, æquale quadratum ADq, conſtituere.

Probl. 9. Dato rectangulo aliud rectangulum æquale, ad datum latus, ſtatuere. 14 e 6.

Probl. 10. Triangulo dato aliud triangulum æquale, ad datam altitudinem conſtituere.




Ex punctis altitudinum A & α, in angulos oppoſitos linea A β & α B, ductæ, ſint parallelæ.

Probl. 11. Dato polygono æquale triangulum conſtituere.

Probl. 12. Datis tribus punctis, non in directum poſitis, ducere circumferentiam. 25 e 3.

Probl. 13. Datis trianguli rectanguli baſe & catheto, invenire hypotenuſam; vel quadratum quadrato addere.

Probl. 14. Datis trianguli rectanguli hypotenuſa & baſe, invenire cathetum; vel quadratum ex quadrato tollere.

Probl. 15. Binarum figurarum ſimilium rationem invenire. Quæratur tertia proportionalis. Aq. Mq:: A. E.

Probl. 16. Datæ figuræ ſimilem figuram, in data ratione conſtituere. Quæratur media proportionalis inter latus ipſius, & latus ſimile. R. √RS:: A. M. Ratio fig. ſit R. S.

Probl. 17. In dato circulo Hexagonum ordinatum inſcribere. 15 e 4.

Probl. 18. In dato circulo Decagonum ordinatum inſcribere. Secetur ſemidiameter circuli ſecundum extremam & mediam rationem, per 11 e 2.

Probl. 19. In dato circulo Pentagonum ordinatum inſcribere. Quæratur Hypotenuſa trianguli rectanguli, cujus Baſis ſit latus Hexagoni, & Cathetus latus Decagoni.

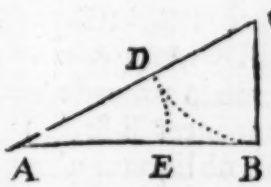
## CAP. XIX.

*Exempla Æquationis Analyticæ, pro Theorematibus inveniendis, Problematibuſque ſolvendis. Ad quem quaſi ſcopum præcepta hactenus tradita præcipuè collineantur.*

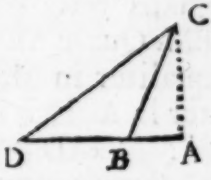
Probl. I. INventio 11 e 2. Nempe, Data recta linea B ſecetur ſic ut rectangulum ſub tota B, & minore ſegmento, æquetur quadrato majoris ſegmenti. Po-

Ponatur majus ſegmentum A: minus erit B-A. ducatur B-A in B: fietque Bq-BA=Aq: vel Aq+BA. =Bq. Quare √u: Bq+¼Bq:-½B= A, per 9 cap. 16. Quod Theorema verbis enunciatur ſic: Si quadrato lineæ datæ, addatur quadrati ipſius quadrans: & è latere quadrato ſummæ; tollatur ſemis lineæ datæ: reliquum erit ſegmentum majus.

Geometricè autem conſtruetur, ſic, Fiat AB =B: eique ad angulos rectos ſtatuatur BC= ½B: & ducatur Hypotenuſa AC: erit AC= √u: Bq+¼Bq. Abſcindatur CD=BC. Eritque reſiduum AD= √u: Bq+¼Bq:-½B. Deniq; menſuretur AE =AD, pro majore ſegmento.



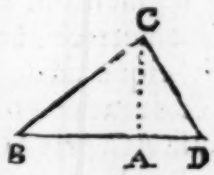

Prob. III. Inventio 12 e 2. Nempe comparatio Baſis obtuſi anguli, cum lateribus. Eſto triangulum BCD: cujus angulus interior ad B, ſit obtuſus: hujus Baſis eſt DC: & latera BD, BC. Hîc BCq-BAq = CAq = DCq (-DAq, per 4 e 2)-BDq-2BDx BA-BAq. Quare BCq+BDq=DCq-2BDxBA.




Quod theorema verbis enuntiatur, ſic: In amblygoniis triangulis, quadratum lateris ſubtendentis obtuſum angulum, excedit ſummam quadratorum laterum eundem comprehendentium, duplice rectangulo ſub uno late-

rum circa obtuſum angulum, & ſegmento ipſius (continuati) inter obtuſum angulum & perpendiculum.

Probl. III. Inventio 13 e 2. Nempe comparatio Baſis acuti anguli, cum lateribus. Eſto triangulum BCD: cujus angulus interior ad B, ſit acutus. hujus Baſis eſt DC: & latera BC, BD. Hîc BCq--BAq=CAq= DCq (-DAq, per 7 e 2) --BDq + 2BD × BA -BAq. Quare BCq+BDq=DCq + 2BD×BA. (Eodem prorſus modo procederet Demonſtratio, ſi D ponatur inter B & A.) In verbis, ſic, In triangulis obliquangulis, quadratum lateris ſubtendentis acutum angulum, minus eſt quam ſumma quadratorum laterum, &c. (2BD × BA -BAq+DAq=BDq, 7 e 2)




Probl. IV. Inventio 14 e 2: Nempe quadrati æqualis rectangulo AB×AD. Eſto AB+AD= 2BM. Quare AB+AD ſecetur æqualiter in M, & inæqualiter in A. Erit igitur per 5 e 2, AB×AD=BMq--AMq. Jam ſupponantur ACq=AB× AD: fiatque triangulum rectangulum MAC cujus hypotenuſa CM=BM ſemiſummæ laterum & baſis AM ſemidifferentiæ laterum: Cathetus erit AC latus quadrati quæſiti, per 48 e 1.

*Inventio* areæ *Trianguli plani.*

Probl. V. Attulit ad me amicus quidam meus,

meus, vir doctus, Theorema de areâ trianguli plani; atque ut id examinarem, & demonſtratione munirem, poſtulavit. Erat autem Theorema, prout memini (nam multi jam elapſi ſunt anni) hâc ferè formâ, licet non in iiſdem literis.

In triangulo plano cujus latera ſunt A, E, B; $\left.\begin{matrix} \frac{1}{8}BqEq-\frac{1}{16}Eqq \\ \frac{1}{8}EqAq-\frac{1}{16}Aqq \\ \frac{1}{8}AqBq-\frac{1}{16}Bqq \end{matrix}\right\}$ æquâtur quadrato areæ trianguli.

Poſtquam aliquamdiu mecum cogitaſſem, occurrit mihi 17, c 18. Theor. 20, quod commodiſſimum huic nodo ſolvendo duxi. Nam ſi trianguli duo crura ſint A, E; & baſis B: inde liquebit, quod $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E+\frac{1}{2}B$, in $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}B$, in $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E$, in $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E$, æquatur quadrato areæ trianguli. Factâ igitur harum quatuor magnitudinum continuâ multiplicatione; prodibit $\frac{1}{8}AqEq+\frac{1}{8}AqBq+\frac{1}{8}EqBq-\frac{1}{16}Aqq-\frac{1}{16}Eqq-\frac{1}{16}Bqq$. Quod eſt ipſum Theorema propoſitum.

Atque hinc non ſolum poſtulato ſatisfeci; ſed etiam quatuor alia Theoremata effectu faciliora exhibui.

Nam quia $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E+\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}B$.

Et $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}B$.

Et quia $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}X$.

Et $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E=\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}X$.

Erit $\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}B$ in $\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}B=\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Bq$.

Et $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}X$ in $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}X=\frac{1}{4}Bq-\frac{1}{4}Xq$.

Liquet igitur primò, $\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Bq$ in $\frac{1}{4}Bq-\frac{1}{4}Xq=Q$: areæ trianguli. In verbis ſic, Si quadrans differentiæ quadratorum ſummæ crurum & baſis, ducatur in quadrantem differentiæ qua-

dratorum basis & differentiæ crurum; producta magnitudo æqualis erit quadrato Areæ trianguli.

Deinde quia $\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Bq$ in $\frac{1}{4}Bq-\frac{1}{4}Xq=\frac{1}{16}ZqBq+\frac{1}{16}BqXq-\frac{1}{16}Bqq-\frac{1}{16}ZqXq$: Liquet secundo, $Zq+Xq-Bq$ in $\frac{1}{16}Bq$, mi $\frac{1}{16}ZqXq=Q$: Areæ trianguli.

Item quia $Zq+Xq=2Z$, per 11, c. 18: Et $ZqXq=Xq$, per 14, c. 18: Liquet tertiò $2Z-Bq$ in $\frac{1}{16}Bq$, mi $Q:\frac{1}{4}X=Q$: Areæ trianguli.

Denique ex his cōparatis erit 4° $\left\{\frac{2ZBq-Bqq-Xq}{16}=Q\right.$: Areæ tri.

Hæc posteriora Theoremata verbis facilè enuntiantur.

Probl. VI. Problematum circa Progressionem Arithmeticam solutio in viginti Propositionibus. Symbola verborum hæc sint: $\alpha$ primus terminus minimus. $\omega$ ultimus maximus. T numerus terminorum. X differentia communis. Z summa omnium terminorum. Est igitur $T-1$ numerus differentiarum: ideoque $TX-X=\omega-\alpha$, summa differentiarum.

Datis tribus ex quinq; illis $\alpha, \omega$, T, X, Z, invenire duo reliqua per viginti propositiones sequentes (tot enim sunt varietates) hoc ordine.

| Datis | Quæruntur | Per Propositi. |
|---|---|---|
| $\alpha, \omega$, T | Z & X | 1 & 2 |
| $\alpha, \omega$, X | T & Z | 3 & 4 |
| $\alpha, \omega$, Z | T & X | 5 & 6 |
| $\alpha$, T, X | $\omega$ & Z | 7 & 8 |
| $\alpha$, T, Z | $\omega$ & X | 9 & 10 |

Datis

| Datis | Quæruntur | Per Propoſition. |
|---|---|---|
| $a$, X, Z | $\omega$ & T | 11 & 12 |
| $\omega$, T, X | $a$ & Z | 13 & 14 |
| $\omega$, T, Z | $a$ & X | 15 & 16 |
| $a$, X, Z | $a$ & T | 17 & 18 |
| T, X, Z | $a$ & $\omega$ | 19 & 20 |

Prop. I. $T\omega+Ta=2Z$.

II. $\frac{\omega-a}{T-1}=X$.

III. $\frac{\omega-z}{X}+1=T$. per 2.

IV. $\frac{\omega q-aq}{X}+\omega+a=2Z$. per 1. 3.

V. $\frac{2Z}{\omega+a}=T$. per 1.

VI. $\frac{\omega q-aq}{2Z-\omega-a}=X$. per 4.

VII. $TX-X+a=\omega$. per 2.

VIII. $TX-X+2z$ in $T=2Z$. per 1 & 7.

IX. $\frac{2Z-Ta}{T}=\omega$. per 1.

X. $\frac{2Z-2Ta}{Tq-T}=X$. per 2. 8.

XI. $\sqrt{u:\alpha q-\alpha X+\frac{1}{4}Xq+2ZX:}-\frac{1}{2}X=\omega$. per 4.

XII. $\sqrt{u:\frac{\alpha q-\alpha X+\frac{1}{4}Xq+2ZX}{Xq}:-\frac{\alpha+\frac{1}{2}X}{X}}=T$. per 8.

XIII. $\omega+X-TX=\alpha$. per 7.

XIV. $2\omega+X-TX$ in $T=2Z$. per 1 & 13.

XV. $\frac{2Z}{T}-\omega=\alpha$. per 9.

XVI. $\frac{2T\omega-2Z}{Tq-T}=X$. per 14.

XVII. $\frac{1}{2}X\pm\sqrt{u:\omega q+\omega X+\frac{1}{4}Xq-2ZX:}=\alpha$. per 4.
prout $\alpha$ contigerit $\left\{\begin{matrix}\text{major}\\\text{minor}\end{matrix}\right\}$ esse quam $\frac{1}{2}X$.

XVIII. $\frac{\omega+\frac{1}{2}X}{X}\mp\sqrt{u:\frac{\alpha q+\omega X+\frac{1}{4}Xq-2ZX}{Xq}:}=T$. per 14.
prout $\alpha$ contigerit $\left\{\begin{matrix}\text{major}\\\text{minor}\end{matrix}\right\}$ esse quam $\frac{1}{2}X$.

XIX. $\frac{2Z}{2T}-\frac{TX}{2}+\frac{X}{2}=\alpha$. per 10.

XX. $\frac{2Z}{2T}+\frac{TX}{2}-\frac{X}{2}=\omega$. per 16.

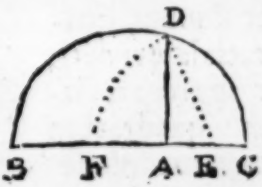
Probl.

Probl. VII. Euclides 11 e 2, docuit ſecare lineam datam, ſic, ut rectangulum ſub tota & minore ſegmento, æquetur quadrato majoris ſegmenti: quæ ſectio eſt penè divina. Proponatur jam illud problema generaliter; Data linea AB ita ſecetur, ut rectangulum ſub tota AB, & minore ſegmento, ad quadratum majoris ſegmenti, rationem quamcunque poſſibilem datam habeat: puta R ad S.

Primo fiat R.S::AB.AC: qui quartus ſit proportionalis: tum pro majore ſegmento ponatur A: minus ſegmentum erit AB-A: quod ductum in AB, dabit rectangulum ABq-AB×A. Erit igitur AB.AC::ABq--AB×A. Aq. Ideoque per 3 cap. 6, ABq×AC-AB×AC×A=AB×Aq. Et diviſis omnibus per AB, erit AB×AC−AC×A=Aq: vel Aq+AC×A=AB×AC. Et per 9 cap. 16, invenitur √u:¼ACq+AB×AC:--½AC=A.

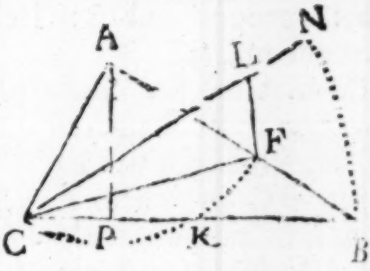
Hoc theorema inventum, verbis ſic enunciatur: Si ad quadratum ſemiſſis quarti proportionalis, adjungatur rectangulum ſub linea recta data, & quarto illo proportionali; Et ex latere quadrato ſummæ tollatur ſemis quarti proportionalis: Reliquum erit ſegmentum majus.

Geometricè ſic. Statuantur AB & AC in directum: Et diametro BC fiat ſemicirculus: Et ſuper BC in puncto A, erigatur perpendicularis AD, ſecans ſemicirculum in D. tum biſecta AC in E, menſuretur



EF=ED. Dico lineam AB ſic ſecari in puncto F, ut ſit R. S :: ABxBF. AFq. Nam ACxAF+ ACxBF=ACxAB=ADq=CFxAF, per 6 e 2, =ACxAF+AFq. Quare ACxBF=AFq. Atqui AB. AC::ABxBF. ACxBF. Ergo,

Probl. VIII. Dato latere alterutro trianguli rectanguli (in quo perpendicularis ex angulo recto ſecat hypotenuſam) una cum BK differentia ſegmentorum hypotenuſæ, invenire tum hypotenuſam, tum triangulum ipſum. Primò detur latus minus CA. Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC: in quo è vertice in hypotenuſam demittatur perpendicularis AP, ſecans hypotenuſam in BP & CP ſegmenta. Eſt autem $CP=\frac{BC-BK}{2}$. Quia eſt BC. CA::CA. $\frac{BC-BK}{2}$ erit $\frac{BCq-BCxBK}{2}=CAq$: vel $BCq-BK\times BC=2CAq$. Quare per 9 e 16, $\sqrt{q:\frac{1}{4}BKq+2CAq}:+\frac{1}{2}BK=BC$. Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic: Si quadratum ſemidifferentiæ ſegmentorum hypotenuſæ addatur duobus quadratis lateri dati; & aggregati latus quadratum augeatur ipſa ſemidifferentia: tota aucta æqualis erit hypotenuſæ.




Geo-

Geometricè ſic. Sumpta AF=AC; Ducatur CF: ipſique perpendicularis FL=$\frac{BK}{2}$ & extendatur CL ad N, ut LN=½BK. Erit CN=BC. Quare inſcribatur circulo CK=CN-BK: & producatur, &c. Nam CFq=2CAq. & CLq=2CAq+¼BKq. Ergo.

Si verò detur majus latus BA: hujuſmodi invenietur æquatio, √q: ¼BKq+2BAq:—½BK=BC. ſumpta $\frac{BC+BK}{2}$ pro PB.

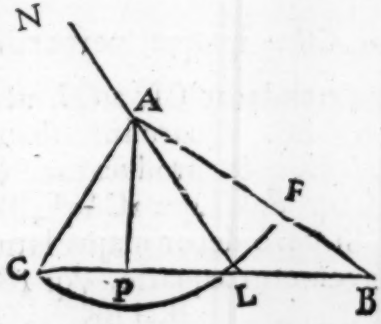
Et modus geometricus priori non abſimilis.

Probl. IX. Datis differentia laterum trianguli rectanguli BF, & perpendiculari AP ab angulo recto in hypotenuſam: invenire tum hypotenuſam, tum triangulum ipſum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam per 7 e 2. 2BA×AF + BFq=BAq + AFq; Ideoque BFq= (ABq+AFq, hoc eſt) BCq-(BA×2CA. hoc eſt) BC×2AP, quia BC. CA:: BA. AP. Erit BCq—2AP×BC=BFq. Quare per 9 c 16. √q: APq+BFq: +AP=BC.

Enun-

Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic: Si quadrato perpendicularis addatur quadratum differentiæ laterum; & aggregati latus quadratum augeatur ipſa perpendiculari: tota aucta æqualis erit hypotenuſæ.

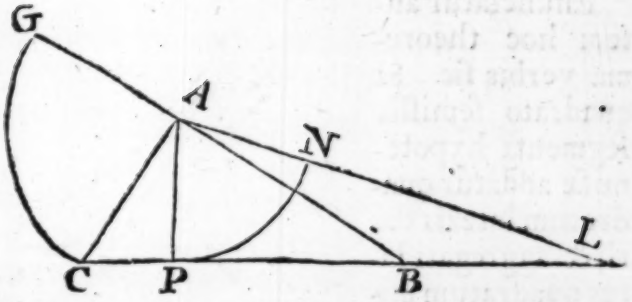



Geometricè ſic. Fiat PL=BF. Et extendatur LA ad N, ut AN=AP. Erit LN=BC. Diametro igitur BC deſcribatur ſemicirclus; in quo ſtatuatur perpendicularis æqualis datæ AP. Et ducantur BA, & CA.

Probl. X. Datis ſumma laterum trianguli rectanguli, BG, & perpendiculari ab angulo recto in hypotenuſam, AP: invenire tum hypotenuſam, tum triangulum ipſum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam per 4 e 2, BGq=(BAq+GAq, hoc eſt) BCq+(2BA× CA, hoc eſt) 2AP×BC, quia BC. CA :: BA. AP. Erit BCq+2AP×BC=BGq. quare per 9 c 16, √q: APq+BGq:-AP=BC.

Enun-




Enunciatur autem hoc theorema ſic. Si quadrato perpendicularis addatur quadratum ſummæ laterum; & aggregati latus quadratum minuatur ipſa perpendiculari: linea reliqua æqualis erit hypotenuſæ.

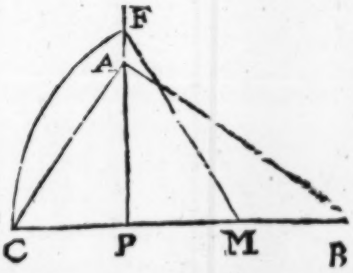
Geometricè ſic. Fiat PL=BG & ducatur AL: ex qua abſcindatur AN=AP. Erit LN=BC. Diametro igitur BC deſcribatur ſemicirculus, &c.

Probl. XI. Datis trianguli rectanguli latere alterutro, CA, & alterno ſegmento hypotenuſæ BP: invenire tum alterum ſegmentum, tum ipſum triangulum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam eſt BP+CP. CA::CA. CP. Erit BP×CP + CPq= CAq. quare per 9. c 16, √q: $\frac{1}{2}$BPq+CAq:— $\frac{1}{2}$BP=CP.

Enun-

Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic. Si quadrato ſemiſſis ſegmenti hypotenuſæ addatur quadratum lateris dati; & aggregati latus quadratum minuatur ipſo ſemiſſe; linea reliqua erit alterum hypotenuſæ ſegmentum.



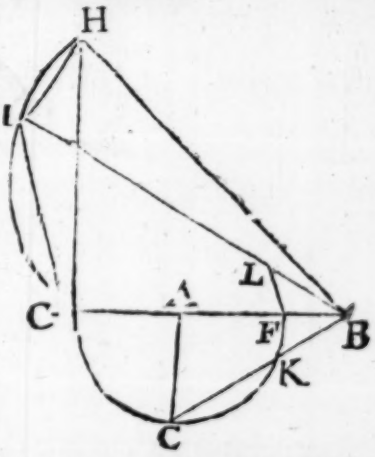

Geometricè ſic. Statuantur ad angulos rectos BP & PF=CA, & biſecta BP in M, ducatur MF: cui menſuretur æqualis MC. Inventum eſt igitur CP alterum ſegmentum: & BC tota hypotenuſa. Diametro BC deſcribatur ſemicirculus: in quo inſcribantur CA, & BA.

Probl. XII. Datis trianguli rectanguli differentia ſegmentorum hypotenuſæ BK, & ſumma laterum, BG: invenire tum differentiam laterum, tum hypotenuſam, tum ipſum triangulum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam eſt BG. BK :: BC. BF: eſt etiam BGq. BKq::(BCq, hoc eſt) BAq+CAq. BFq. Item 2BGq-BKq. BKq:: (2BAq+2CAq—BFq hoc eſt) BGq. BFq: Nam per 8 c 18 2BAq+2CAq=BGq+BFq. quare √q: 2BGq—BKq. BG :: BK. BF :: BG. BC.

Enunciatur autem hoc Theorema verbis ſic:

Si



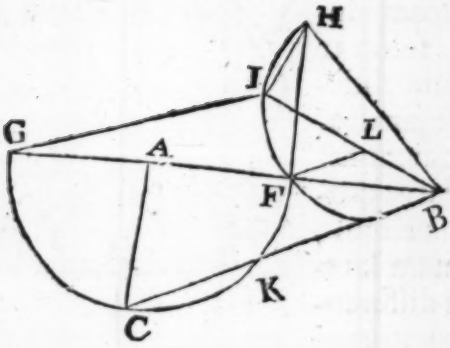

Si è quadrato ſũmæ laterum duplicato tollatur quadratum differentiæ ſegmentorum hypotenuſæ: Erit, ut latus quadratum reliqui, ad ſummam laterum; ſic differentia ſegmentorum hypotenuſæ, ad differentiam laterum, & ſic ſumma laterum ad hypotenuſam.

Geometricè ſic. Statuantur ad angulos rectos BG & GH=BG. tum diametro BH deſcribatur ſemicirculius: in quo inſcribatur HI=BK: & ducatur BI. Eſt igitur BI=√q: 2BGq—BKq. Fiat etiam BL=BK. Ducatur GI: eique parallela LF. Ergo inventa eſt BF differentia laterum.

Probl. XIII. Datis trianguli rectanguli differentia ſegmentorum hypotenuſæ BK, & differentia laterum BF: invenire tum ſummam laterũ, tum hypotenuſam, tum ipſum triangulũ.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam eſt BF. BK:: BC. BG: eſt etiam BFq. BKq:: (BCq, hoc eſt) BAq+CAq. BGq. Item 2BFq—BKq. BKq:: (2BAq+2CAq—BGq, hoc eſt) BFq. BGq. Nam per 8 c 18, 2BAq+2CAq=BGq+BFq. Quare √q: 2BFq—BKq. BF:: BK. BG:: BF. BC.

Enun-




Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic: Si è quadrato differentiæ laterum duplicato tollatur quadratum differentiæ ſegmentorum hypotenuſæ: Erit, ut latus quadratum reliqui, ad differentiam laterum; ſic differentia ſegmentorum hypotenuſæ, ad ſummam laterum: & ſic differentia laterum, ad hypotenuſam.

Geometricè ſic. Statuantur ad angulos rectos BF & FH=BF. tum diametro BH deſcribatur ſemicirculus, in quo inſcribatur BI=BK: & ducatur HI. Eſt igitur HI=√q: 2BFq —BKq. Fiat BL=HI. Ducatur FL: eique parallela IG. Ergo inventa eſt BG ſumma laterū.

Probl. XIV. Datis trianguli plani cujuſcunq; differentia laterum FB, differentia ſegmentorum baſis BK, & differentia inter majus latus & baſem CL: invenire tum baſem, tum ſummam laterum, tum ipſum triangulum. Et primò ſit exceſſus penes baſem. Puta factum eſſe quod poſtulatur; ſitque triangulum ECD.

Quo-

Quoniã eſt FB. BK::BD. $\frac{BK \times BD}{BF}$ =BG, per 17.c. 18, Th. 16. Erit $\frac{BK \times BD - BFq}{BF}$ =FG: & $\frac{BK \times BD - BFq}{2FB}$ =CF. Adde BF, & $\frac{BK \times BD + BFq}{2BF}$ =BC. tolle hanc ex BD, & $\frac{2BF \times BD - BK \times BD - BFq}{2BF} = \frac{2BF \times CL}{2BF}$ Quare $2BF \times BD - BK \times BD = 2BF \times CL + BFq$. & per 3 c 6. $2BF - BK. 2CL + BF :: BF. BD :: BK. BG$.

Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic. Ut differentia inter differentiam laterum duplicatam, & differentiam ſegmentorum baſis, eſt ad aggregatum differentiæ inter majus latus & baſim duplicatæ, & differentiæ laterum; ſic differentia laterum, ad baſem: & ſic differentia ſegmentorum baſis, ad ſummam laterũ.

Geometrica praxis facilior eſt, quàm ut neceſſe ſit apponi.

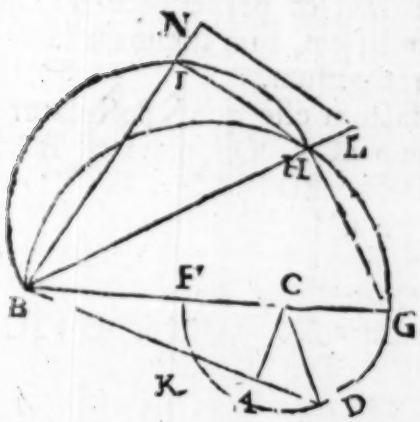
Si verò exceſſus fuerit penes majus latus: theorema erit, BK-2BF. 2CL-BF :: BF. BD :: BK. BG.

Hujus

Hujus theorematis inveſtigationem; & problematis quo è datis trianguli plani cujuſcunq; ſumma laterum BG, differentia ſegmentorum baſis BK, & differentia inter majus latus & baſem CL; poſtulatur invenire tum baſem, tum differentiam laterum, ſolutionem, omitto; ut habeant ſtudioſi analyſeos, quo ſolertiam ſuam exerceant.

Probl. XV. Datis trianguli plani cujuſcunque ſumma laterum BG, differentia ſegmentorum baſis BK, & perpendiculari CA: invenire tum baſem, tum differentiam laterum, tum ipſum triangulum. Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum BCD. Quoniam per 17 c 18 Th. 16. BG. BD :: BK. BF. Et per 5 c 18, DKq=BDq+BKq-2BK×BD. Et per 47 e 1 (4ADq hoc eſt) DKq+4CAq=(4CDq, hoc eſt) FGq. Erit BDq+BKq-2BK × BD + 4CAq= FGq. Tolle FG ex BG: & BG-√q: BDq+BKq -2BK×BD+4CAq :=BF. Quare erit,
BG. BD :: BK. BG-√q : BDq+BKq-2BK×BD + 4CAq. Et per 3 c 6, BK × BD=BGq-√q: BGq×BDq + BGq×BKq-BGq×2BK×BD + BGq× 4CAq. Eſt igitur per 8 c 16, Q: BGq- BK×BD, hoc eſt, BGqq-BGq×2BK × BD + BKq×BDq= BGq×BDq + BGq×BKq-BGq × 2BK×BD + BGq× 4CAq. Ideóque BGq×BDq-BKq × BDq=BGqq -BGq×BKq-BGq×4CAq. vel etiam, BGq-BKq in BDq=BGq-BKq-4CAq in BGq. Ergo √q: BGq-BKq. √q: BGq-BKq-4CAq :: BG. BD:: BK. BF.

Enun-



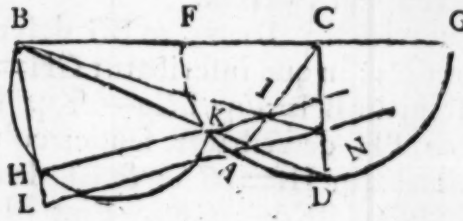

Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic. Ut latus quadratum differentiæ inter quadrata ſummæ laterum, & differentiæ ſegmentorum baſis, eſt ad latus quadratum ejuſdem differentiæ multatæ quadrato perpendiculi duplicati; ſic ſumma laterum, ad baſem: & ſic differentia ſegmentorum baſis, ad differentiam laterum.

Geometricè ſic. Diametro BG deſcribatur ſemicirculus: in quo inſcribatur GH=BK: & BH. Eſt igitur BH=√q: BGq—BKq. Rurſus diametro BH deſcribatur ſemicirculus: in quo inſcribatur HI=2CA: & BI. Eſt igitur BI=√q: BGq - BKq—4CAq. Fiat BL=BG: & ab L ducatur LN parallela ipſi HI, concurrens cum BI producta in N. Ergo inventa eſt BN=BD.

Probl. XVI. Datis trianguli plani cujuſcunq; differentia laterum BF, differentia ſegmentorum

rum basis BK, & perpendiculari CA: invenire tum basem, tum summam laterum, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum BCD. Quoniam est BG. BD::BK. BF. Et DKq=BDq+BKq-2BK×BD, per 5 c 18. Et per 47 e 1, (4ADq, hoc est) DKq + 4CAq =(4CDq, hoc est) FGq. Erit BDq+BKq-2BK ×BD + 4CAq=FGq. Adde FG ad BF: Et BF + √q: BDq + BKq - 2BK × BD + 4CAq=BG. Quare BF. BD :: BK. BF+√q: BDq + BKq- 2BK×BD +4CAq. Item BK × BD=BFq + √q: BFq×BDq + BFq×BKq—BFq×2BK×BD + BFq× 4CAq. Est igitur Q: BK × BD—BFq, hoc est, BKq×BDq—BFq×2BK×BD+BFqq=BFq×BDq +BFq×BKq—BFq×2BK×BD+BFq×4CAq. Ideoque BKq×BDq—BFq×BDq=BFq×BKq—BFqq +BFq×4CAq. vel etiam BKq—BFq in BDq =BKq-BFq+4CAq in BFq. Ergo √q: BKq— BFq. √q: BKq—BFq+4CAq::BF.BD::BK.BG.



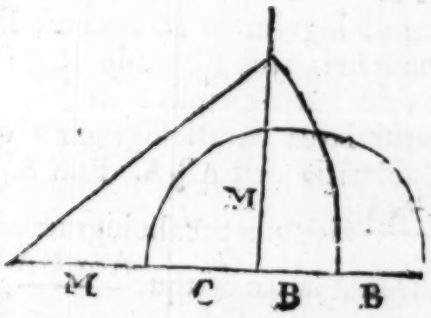

Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. Ut latus quadratum differentiæ inter quadrata differentiæ segmentorum basis, & differentiæ laterum, est ad latus quadratum ejusdem diffe-

differentiæ auctæ quadrato perpendiculi duplicati; ſic differentia laterum, ad baſem: & ſic differentia ſegmentorum baſis, ad ſummam laterum.

Geometricè ſic. Diametro BK deſcribatur circulus: in quo inſcribatur KH=BF: & BH. Eſt igitur BH=√q: BKq−BFq. Fiat BHL=BF: & HKI=2CA. Ducatur BI. Eſt igitur BI =√q: BKq−BFq+4CAq. Ducatur etiam LN parallela ipſi HI, concurrens cum BI producta in N. Ergo inventa eſt BN=BD.

Probl. XVII. Datis in triangulo rectangulo differentia inter baſem & hypotenuſam B, & differentia inter cathetum & hypotenuſam C: invenire tum hypotenuſam, tum ipſum triangulum.

Pro hypotenuſa ponatur A. Baſis erit A−B. & Cathetus A−C. & per 47 e 1, Cathetus eſt √q: 2BA−Bq. Quare √q: 2BA−Bq: =A−C. Et 2BA−Bq=Aq−2CA+Cq. vel 2B+2C in A mi Aq=Bq+Cq. Ergo per 9 c 16, B+C+√q: 2BC=A, hypotenuſæ.




Enun-

Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic. Aggregatum utriuſque differentiæ (tum baſis tum catheti) ab hypotenuſa; unâ cum √q: duplicis rectanguli ſub ipſis differentiis, æquatur hypotenuſæ.

Geometricè ſic. Ducatur linea infinita in qua menſurentur B, B, & C. Hac diametro fiat ſemicirculus. Et in communi B & C termino ſtatuatur ad angulos rectos linea M. Eſt igitur Mq=2BC. Menſuretur etiam M in linea infinita poſt C. Et ſemidiametro M+C+B deſcribatur arcus donec concurrat cum linea M perpendiculari producta. Tum à puncto concurſus ad centrum illius arcus ducatur linea pro hypotenuſæ. Et deſcriptum erit triangulum rectangulum quæſitum.

Probl. XVIII. Ad datam rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrāmum adplicare, deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri parallelogrammo D dato. Oportet autem datum rectilineum non majus eſſe eo, quod ad dimidium applicatur. Prop. eſt 28 e 6.

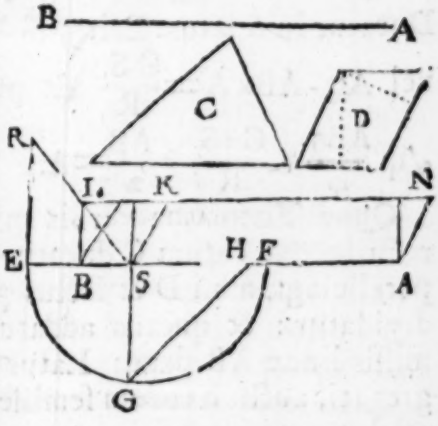
In parallelogrammo D, notetur lineis perpendicularibus ejus Altitudo, R, & Latitudo S: nec refert utra ex ipſis ſtatuatur major.

Ponatur latus parallelogrammi quæſiti A: portio ablatitia erit AB-A. Fiat S. R::AB-A. $\frac{AB\times R-R\times A}{S}$ altitudo parallelogrammi quæſiti: Ducatur in A latus: eritque $\frac{AB\times R\times A-R\times Aq}{S}=C$: vel $AB\times A-Aq=\frac{C\times S.}{R}$ Et per 9, Cap. 16, AB

$\frac{AB}{2} \pm \sqrt{q: \frac{ABq}{4} - \frac{CxS}{R}} = A.$

Quod Theorema verbis enunciatur ſic. Si rectilineum C datum ducatur in latitudinem parallelogrammi D; & factus dividatur per altitudinem: & quotus ex quadrato ſemiſſis lineæ AB datæ auferatur: latus quadratum reliqui auctum eodem ſemiſſe, erit latus parallelogrammi quæſiti.

Geometricè ſic: Fiat ER=$\sqrt{q}$C. Tum R. S::ER.ES. Statuantur ER & ES ad angulos rectos: Sumptaq; SF=ER, diametro EF deſcribatur ſemicirculus: in quo erectâ perpendiculari SG erit $SGq = \frac{CxS}{R}$




Ex G puncto menſuretur GH=½AB=HB: erit $HS = \sqrt{: \frac{ABq}{4} - \frac{CxS.}{R}}$ cui ſi adjungas HA =½AB; erit AS latus parallelogrammi quæſiti. Et BS=AB-A portioni ablatitiæ. Et BL parallela lineæ ER, erit altitudo. Ergo parallelogrammum quæſitum eſt ASKN, factum ipſi D æquiangulum.

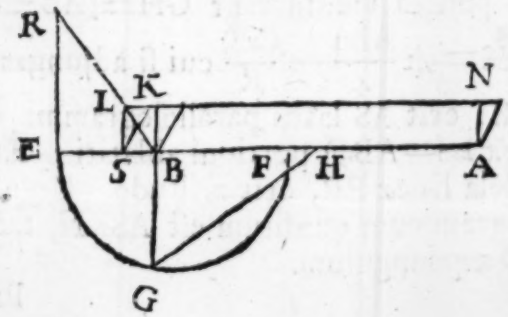
Probl.

Probl. XIX. Ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri parallelogrammo D dato, Prop. eſt 29 e 6.

In parallelogrammo D notetur Altitudo & Latitudo, ſicut in præcedente.

Ponatur latus parallelogrammi quæſiti A: Portio adjectitia erit A-AB. Fiat S.R::A-AB. $\frac{R \times A - AB \times R}{S}$ altitudo parallelogrammi quæſiti. Ducatur in A latus. Eritq; $\frac{R \times Aq - AB \times R \times A}{S} = C$. vel $Aq - AB \times A = \frac{C \times S.}{R}$ Et per 9. Cap. 16, $\sqrt{q: \frac{ABq}{4} + \frac{C \times S}{R}} : + \frac{AB}{2} = A$.

Quod Theorema verbis enunciatur ſic. Si rectilineum datum C ducatur in latitudinem parallelogrammi D & factus per altitudinem dividatur: & quotus addatur quadrato ſemiſſis lineæ AB datæ: Latus quadratum aggregati, auctum eodem ſemiſſe, erit latus parallelogrammi quæſiti.




Geo-

Geometricè ſic. Fiat ER=√qC. Tum R. S::ER. EB. Statuantur ER & EB ad angulos rectos: Sumptaque BF=ER, diametro EF deſcribatur ſemicirculus: in quo erecta perpendiculari BG, erit $BGq=\frac{C\times S}{R}$. Eſto BH=½AB =AH. Et ducatur $GH=\sqrt{q:\frac{ABq}{4}+\frac{C\times S}{R}}:=HS$: Eſt igitur AS=A lateri parallelogrammi quæſiti: Et BS=A-AB portioni adjectitiæ. Et altitudo erit SL parallela lineæ ER. Ergo parallelogrammum quæſitum eſt, ASKN factum ipſi D æquiangulum.

Probl. XX. Datis trianguli plani cujuſcunq; duobus lateribus BC, BD, cum angulo B intercepto: invenire tertium latus. Vel datis tribus lateribus: invenire angulum B, uni ipſorum oppoſitum.

Eſto factum quod poſtulatur: ſitque triangulum BCD. Centro B, ſemidiametro BC, deſcribatur arcus CK: & perpendicularis CA. Eſt igitur KD differentia laterum: & AK ſimilis ſinui verſo anguli B. Nam Rad. vB::BK. AK. Eſtque $AK=\frac{BK\times vB}{Rad.}$. Eſt autem etiam AK=BK±BA: ut ex ſchematibus comparatis liquet.

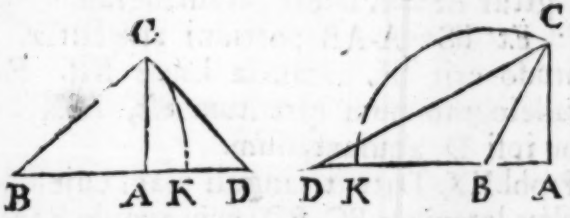
Et quia BDq+BKq=tum
{2BD×BK+KDq. per 5 c 18}
{CDq±2BD×BA. per 2,3, c 19.}
Erit 2BD×BK+KDq=CDq±2BD×BA. Quare 2BD×BK±2BD×BA. hoc eſt, 2BD×AK+KDq:



=CDq.

$=CDq$. At verò $2BD \times AK = \frac{2BD \times BC \times svB}{Rad.}$

Ergo $\frac{2BD \times BC \times svB}{Rad.} + KDq = CDq$. Quod eſt theorema primum. Et $\frac{CDq - KDq : in\ Rad.}{2BD \times BC} = svB$. Quod eſt theorema ſecundum.




Enunciatur quidem verbis primum theorema ſic: Si duplicatum rectangulum ſub lateribus datis ducatur in ſinum verſum anguli intercepti: & factus dividatur per Radium: Quotus auctus quadrato differentiæ laterum, æqualis erit quadrato tertii lateris.

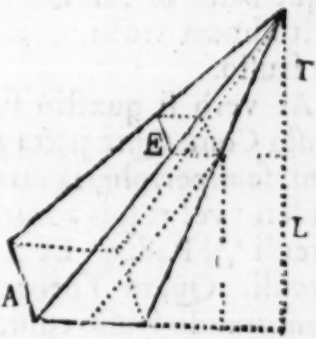
Secundum verò ſic: Si differentia quadratorum lateris oppoſiti, & differentiæ laterum, ducatur in Radium; & factus dividatur per duplicatum rectangulum ſub lateribus continentibus: quotus æqualis erit ſinui verſo anguli quæſiti.

Probl. XXI. Datis fruſti Pyramidis utraque baſe Aq, Eq, & altitudine L: invenire menſuram fruſti.

Prænoſcendum eſt ex 7 & 10 e 12. quod par-

parallelepipedon æquatur tribus pyramidibus: Et Cylindrus æquatur tribus conis, ejuſdem baſis & altitudinis.

Eſtque altitudo pyramidis abſciſſæ (T) primò quærenda, ſic, A–E. E :: L. T. Quare $\frac{LE}{X}$ =T. Et altitudo totius pyramidis eſt L+T. Item pyramis tota tripla, eſt AqL+AqT. Et pyramis abſciſſæ tripla, eſt EqT. Ergo triplum fruſtrum pyramidis eſt AqL+AqT-EqT.




Hoc theorema oſtendit unum modum commenſurandi fruſtum pyramidis: Enunciatur autem verbis ſic.

Si ſolidum ſub baſe majore & tota altitudine multetur ſolido ſub baſe minore & altitudine pyramidis abſciſſæ: reliqui triens æqualis erit fruſto.

Rurſus quia per 2 c 11, Aq-Eq=ZX: & T =$\frac{LE}{X}$; Erit AqL+ (ZEL, hoc eſt per 3 e 2) AEL+EqL=AqL+AqT-EqT. Ergo triplex fruſtum pyramidis eſt etiam Aq+Eq+AE in L. Hoc theorema docet alterum modum commenſurandi fruſti: enunciatur autem verbis ſic.

Si aggregatum utriuſque baſis fruſti: py-

ramidis, & mediæ inter ipſas proportionalis, ducatur in altitudinem fruſti: facti triens æqualis erit fruſto.

Item quia per 2 c 11, $2Aq+2Eq=Zq+Xq$: Erit $ZqL+XqL+2AEL$ æquale ſex fruſtis. At per 11 c 18. $Xq+2AE=Z$. Ergo $Zq+Z$ in L æquale eſt ſex fruſtis pyramidis. Atque hoc Theorema docet tertium modum commenſurandi fruſti pyramidis. Enunciatur autem verbis ſic. Si ad aggregatum baſium addatur quadratum aggregati laterum quadratorum utriuſque baſis, & ſumma eorundem ducatur in altitudinem fruſti: facti ſextans æqualis erit fruſto.

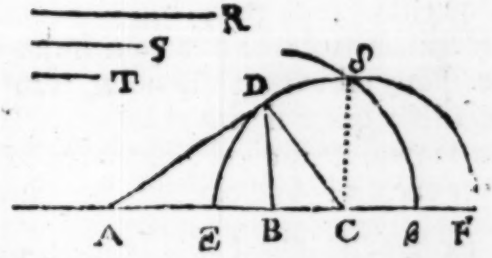
At verò ſi quæſtio ſit de commenſurando fruſto Coni. Quia juxta Archimedæum inventum, ſemiperipheria circuli æqualis eſt $\frac{22}{7}$ Radii ferè: vel magis accuratè $\frac{355}{113}$ Rad. Erit area circuli $\frac{355}{113}$ Rad: q. Et 113. 355::Rad: q. area circuli. Quare Theorema primum de commenſurando fruſto coni, eſt $\frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{3}$ $AqL+\frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{3}AqT$ $-\frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{3}EqT$, æquatur triplo fruſto. Secundum eſt $\frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{3}Aq+\frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{3}Eq+\frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{3}AE$ in L, æquatur triplo fruſto. Tertium eſt $\frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{3}Zq+\frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{3}Z$ in L, æquatur ſextuplo fruſto Coni.

Probl. XXII. Problema Apolonii Pergæi ἐναλυομένῳ τόπῳ. Datis in plano duobus punctis A, B, deſcribere circulum, in cujus circumferentiam rectæ lineæ AD, BD, ab iiſdem punctis ductæ, datam habeant rationem R ad S.

Puta factum eſſe quod quæritur: ſitq; circuli quæſiti centrum C in eadem recta linea

cum

cum punctis A, B; & ſemidiameter CD. Fiat R.S::S.T. Quia triangula duo ACD,DCB (ubicunque ſumitur punctum D) ſunt ut AC ad BC: Et latera DA, DB, communi angulo C ſimiliter oppoſita, ſunt in ratione R ad S: & latus C D utrique commune: Non difficile erit concipere triangula ipſa ACD, DCB eſſe ſimilia. Quare R. S :: DA. DB :: AC. DC::DC. BC. Et per 1 c 15, AC. BC::Rq. Sq :: R.T. Si igitur pro BC ponatur A: Erit AB+A. A::R. T. Et AB x T + T x A=R x A: vel $\frac{AB \times T}{R-T}$ =A. Denique √: AC×BC:=DC.




Quæ enunciatur verbis ſic. Si punctorum intervallum ducatur in tertium rationis datæ terminis proportionalem: & factus dividatur per exceſſum termini primi ſupra tertium: Quotus æqualis erit diſtantiæ puncti citerioris à centro. Et latus quadratum rectanguli ſub utraque diſtantia à centro, æquatur ſemidiametro. Geometrica affectio facillima eſt.

Probl. XXIII. Datis dolii, ſive vaſis vinarii,

longitudine interna 2CL, & ſemidiametris tum medii CB, tum baſis LD: invenire dolii ipſius capacitatem. Eſt quidem dolium fruſtum ſphæroideos, quæ fit revolutione ſemiſſis ellipſeos ſuper diametrum ſuam tranſverſam ſive axim. Ad menſuram autem fruſti inveniendam, tum totius ſphæroideos, tum abſciſſarum portionum menſuras ſciri oportet: harum enim menſurarū differentia eſt menſura fruſti.

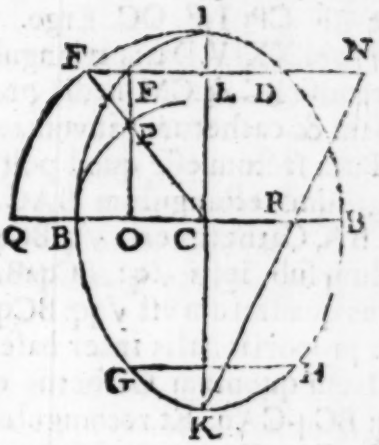
Soliditas totius ſphæroideos eſt $\frac{3}{11}\frac{1}{3}\frac{1}{3}$ BCq in $\frac{2}{3}$ IK: qui duplus eſt conus baſis BCB, & altitudinis IK: Archim. de conoid. & ſphæroid. prop. 32.

Soliditas verò portionis IED abſciſſæ, habetur ſic. LK. LK+KC:: $\frac{3}{11}\frac{1}{3}\frac{1}{3}$ LDq in $\frac{1}{3}$ LI. Soliditas quæſita. Ibid. prop. 34.

Deſideratur autem adhuc (qui hujus negocii præcipuus eſt cardo) diameter tranſverſa ſive axis IK: quem ſic invenies.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: Et deſcribatur ellipſis: & reliqua; ſicut in ſchemate. Et fiat CK. CB::CB. $\frac{CBq}{CK}$=CR, quod eſt ſemilatus rectum per 13 11 conic. Apol. Iterū fiat CK. $\frac{CBq}{CK}$::CK+CL. $\frac{CBq \text{ in } CK+CL}{CKq}$=LN. Ducatur in IL, hoc eſt CK—CL (quod idem eſt ac ſi ducatur CBq in CKq-CLq per 11 c 18) fietque $\frac{CBq \times CKq - CBq \times CLq}{CKq}$=LEq. per 13 11 conic. Apol. Ergo $\sqrt{q}\frac{CBq \times CLq}{CBq - LEq}$ = CK, ſemiaxi; hoc eſt $\frac{CB \times CL}{OP}$=CK.

Quod




Quod theorema verbis enuntiatur ſic. Si quadratum Semi-diametri medii dolii ducatur in quadratum dimidiatæ longitudinis: & factus dividatur per differentiam quadratorum à ſemidiametris medii & baſis: quoti latus quadratum erit ſemiaxis ſphæroideos.

Geometricè ſic. Ducatur EO parallela axi. Et ſemidiametro CP=CB fiat arcus ſecans ipſam EO in P, continuetur CP donec concurrat cum baſe LE producta in F. Erit CF æqualis ſemiaxi quæſito. Aliter. Quia CP=CB: & CO=LE: erit (√u: CBq-LEq) OP. CB::CL. CF=CK.

*Conſectarium.* Atque hinc patet meridianos in Analemmate eſſe veras Ellipſes. Verbi gratia, Cogitetur quadrans Analemmatis CIFQ, in quo deſcripta ſit Ellipſis IEB. Dico eandem eſſe Meridianum. Nam cum CQ ſit quadrans Æquinoctialis, & FL quadrans paralleli: ſitq; meridianorum proprium ſecare Æquinoctialem, & omnes circulos ipſi parallelos, in ſegmenta ſimilia, per 10, 12 Theod. de ſphæra. Si igitur conſtiterit eſſe CQ. CB::LF. LE: Ellipſis IEB ſecans ipſos erit meridianus. At

verò CF=CQ: & CP=CB: & OC=LE: Eſtque CF. CP::LE. OC. Ergo.

Probl.XXIV.Datis trianguli rectanguli hypotenuſa BC,& CM mediâ proportionali inter baſem & cathetum; invenire triangulum.

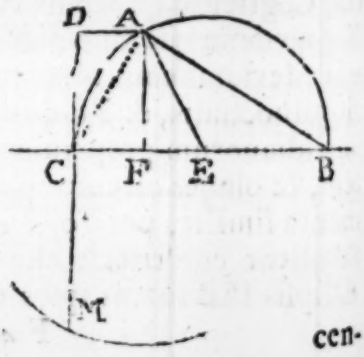
Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitq; triangulum rectangulum BAC. Quoniam baſis eſt BA, Cathetus erit $\sqrt{q:BCq-BAq}$: & rectangulum ſub ipſis $\sqrt{q}$: BCq×BAq-BAqq: cujus latus quadratum eſt $\sqrt{qq:BCq\times BAq-BAqq}$: media proportionalis inter baſem & Cathetum.

Item quoniam Cathetus eſt CA, Baſis erit $\sqrt{q:BCq-CAq}$. Et rectangulum ſub ipſis, $\sqrt{q}$: BCq×CAq-CAqq: cujus latus quadratum eſt $\sqrt{qq}$: BCq×CAq-CAqq: media proportionalis inter baſem & Cathetum.

Quare BCq×BAq-BAqq=CMqq. Et
BCq×CAq-CAqq=CMqq.

Ergo per 9 c 16, $\frac{1}{2}BCq \pm \sqrt{q:\frac{1}{4}BCqq-CMqq} = \frac{BAq}{CAq}$

Quod Theorema enuntiatur verbis ſic. Si dimidiato hypotenuſæ quadrato, latus quadratum exceſſus quadrantis quadrato-quadrati hypotenuſæ ſupra quadrato-quadratum medii proportionalis inter baſem & Cathetum, addatur; aggregatum erit baſis quadratum: ſin auferatur, reliquum erit quadratum Catheti.




Geometricè ſic. Dimetro BC, & cen-

centro E medio, deſcribatur ſemicirculus: Tum fiat BC. CM :: CM. CD=AF perpendic. intra ſemicirculum. Eſt igitur BC×AF=CMq. compleatur triangulum BAC. Nam ¼ BCq (AEq)-AFq=EFq.

Quare $\frac{1}{2}$BC $\pm$ (EF) $\sqrt{q}$: $\frac{1}{4}$BCq-AFq : = $\begin{cases} BF. \\ CF. \end{cases}$

Ducantur omnia in BC: fietque

$\frac{1}{2}$BCq $\pm\sqrt{q}$ : $\frac{1}{4}$BCqq-(BCq×AFq) CMqq : =

$= \begin{cases} BC \times BF = BAq. \\ BC \times CF = CAq. \end{cases}$

Probl. XXV. Datis trianguli rectanguli baſe BA, & AM mediâ proportionali inter hypotenuſam & Cathetum, invenire triangulum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam Cathetus eſt CA, hypotenuſa erit $\sqrt{q}$: BAq+CAq: Et media inter ipſas proportionalis $\sqrt{qq}$ : CAqq+BAq×CAq.

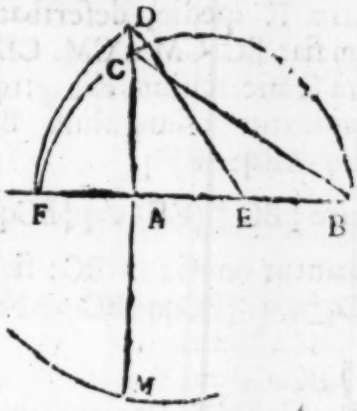
Item quoniam hypotenuſa eſt BC, cathetus erit $\sqrt{q}$: BCq-BAq : Et media inter ipſas proportionalis $\sqrt{qq}$: BCqq-BAq×BCq.

Quare CAqq+BAq×CAq=AMqq. Et BCqq-BAq×BCq=AMqq. Ergò per 9 c 16.

$\sqrt{q}$ : $\frac{1}{4}$ BAqq+AMqq : $\mp\frac{1}{2}$BAq = $\begin{cases} CAq. \\ BCq. \end{cases}$

Quod Theorema verbis enuntiatur ſic. Si lateri quadrato ſummæ ex quadrante quadrato-quadrati baſis, & quadrato-quadrati mediæ proportionalis inter hypotenuſam & Cathetum, dimidiatum baſis quadratum auferatur, reliquum erit Catheti quadratum: ſin addatur, aggregatum erit quadratum hypotenuſæ.

Geometricè ſic. Fiat BA. AM :: AM. AD perpendic. eſt igitur BA × AD = MAq. Ex medio baſis puncto E ad perpendicularem AD, ducatur ED = EF. Et diametro BF deſcribatur ſemicirculus ſecans AD in C. Tum ducta BC compleatur triangulum BAC. Nam $\frac{1}{4}$ BAq + ADq = EFq.




Quare $\sqrt{q : \frac{1}{4}}$ BAq + ADq : $\mp \frac{1}{2}$ BA = $\begin{cases} AF. \\ BF. \end{cases}$

Ducantur omnia in BA : fietque

$\sqrt{q : \frac{1}{4}}$ BAqq + (BAq × ADq) AMqq : $\mp \frac{1}{2}$ BAq =

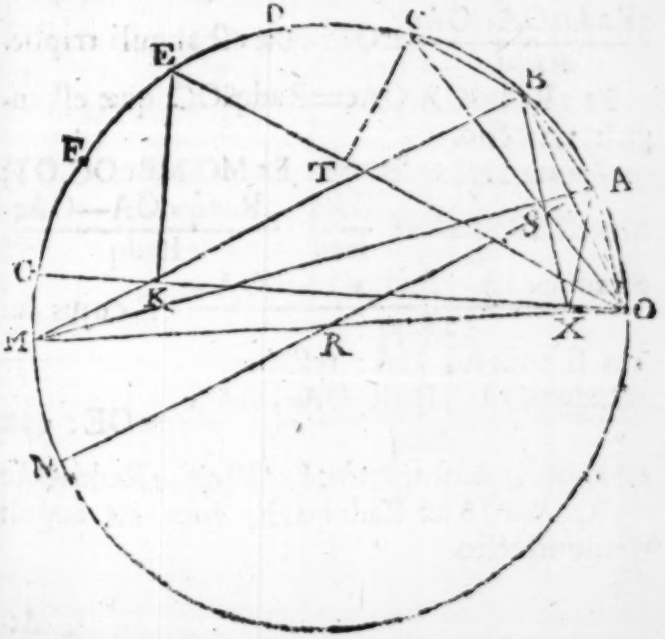
$= \begin{cases} BA \times AF = CAq. \\ BA \times BF = BCq. \end{cases}$

*Conſectarium.* Atque ex his duabus proportionibus patet æquationum, in quibus ſunt tres ſpecies æqualiter in ordine ſcalæ aſcendentes, quarum ſuprema ſit quadrato-quadratica, effectio Geometrica.

Probl. XXVI. De angulorum ſive peripheriarum biſectione, triſectione, quinquiſectione, ſeptiſectione, pauca etiam, ad Analytices præſtantiam, uſumque admirandum, oſtendendum, apponam. Geometricam quidem praxim adhuc inventam non habent : ſicut nec Meſolabium inventum eſt. At verò in Sectione 15 Cap. XVIII, Æquationes quaſdam Cubicas præ-

prælibavi; qua etiam ſolertia, alias innumeras Analytices ſtudioſus poterit comminiſci, quarum fortaſſe ope meſolabium hactenus tenebris obvolutũ, in lucem tandem proferatur.

Diſtinguantur in peripheria ſeptem æquales partes ab O ſine diametri literis A B C D E F G: ducantur ſubtenſæ, ſicut fit in ſchemate. Sumantur MX=MB. ducantur etiam AX & XB; & diameter NRA; & ad OE perpendicularis CT; & ad OG perpendicularis EK. Quoniam per 17 Cap. XVIII, Theor. 1, AB=AX: erunt triangula BMX, ORA, OAX, ſimilia; ideoque $\frac{OAq}{Rad.}$ = OX. Sunt etiam triangula OAB, ARM, ſimilia. Et per



47 c 1, MA = √q: 4Radq — OAq.

His ſic præmiſſis, erit RA. MA, hoc eſt, Rad. √q: 4 Rad q — OAq :: OA. OB. Ergo $\frac{4Radq \times OAq - OAqq}{Radq} = OBq$: quæ eſt anguli duplicatio.

Et 4Radq×OAq--OAqq = Radq×OBq: quæ eſt anguli biſectio.

Deinde quia OS = OA. & SA = OX. & NS = MX = MB. Erit per 17c 18. Th. 16. $\frac{NS \times SA}{OS} = SC$: hoc eſt 2Rad — $\frac{OAq}{Rad}$ in $\frac{OAq}{Rad}$, diviſa per OA, vel $\frac{2Radq \times OA - AOc}{Radq} = SC$. Et ſi addatur OA, fiet $\frac{3Radq \times OA - OAc}{Radq} = OC$: quæ eſt anguli triplic.

Et 3Radq×OA-OAc = Radq×OC: quæ eſt anguli triſectio.

Itē, quia 2ET+CB = OE. Et MO. MB :: OC. OT: hoc eſt 2Rad. 2Rad-$\frac{OAq}{Rad}$ :: $\frac{3Radq \times OA - OAc}{Radq}$. $\frac{6Radqq \times OA - 5Radq \times OAc + OAqc}{2Rqq}$: E cujus duplo ſi tollatur OA: reſtabit $\frac{5Radqq \times OA - 5Radq \times OAc + OAqc}{Rqq} = OE$: quæ eſt anguli quintuplatio. Et OAqc--5Radq×OAc +5Radqq×OA = Radqq×OE: quæ eſt anguli quinquiſectio.

At-

Atque hac forma progredi licet ad Septiſectionem inveniendam. Nempe 7 Rccx OA-14 Rqqx OAc+7Rqx OAqc+OAqqc=Rccx OG.

Nam MO. MB::OE. OK. Et 2OK-OC=OG. Operationem ſtudioſis relinquo.

Verùm quia Radius ponitur 1, quæ in Multiplicatione & Diviſione, nihil mutat: idcircò in hiſce omnibus Æquationibus, Radius cum omnibus ſuis poteſtatibus, omitti poterit.

Sed quo artificio iſtiuſmodi operoſæ Æquationes (in quibus non ſunt tantum tres ſpecies æqualiter in ordine ſcalæ aſcendentes) ſolvantur, quanquam non eſt hujus inſtituti docere: tamen quod in hoc negotio in uſum nobiliſſimi doctiſſimique Domini Gerardi Aungier, Domini Aungier & Baronis de Longford, ante plurimos annos, commentus ſum; in gratiam ſtudioſorum Mathematices, qua poſſum brevitare, in lucem proferre non pigebit.

*SOLI DEO GLORIA*

# De Æquationum Affectarum Resolutione in Numeris.

1. Conſtruendæ Æquationis affectæ modus. Sumatur, ut lubet, pro B, 3: pro Cq, 16: pro Dc, 125: pro Fqq, 1296: &c. Nec refert utrum numeri ſumpti ſint verè figurati necne. Sitque ex his Coëfficientibus conſtruenda Æquatio Quadrato-cubica. Ea pro modo Tabulæ Analyticæ poſterioris in ordine Quadrato-cubico, conflata, eſto Lqc-5BLqq+10CqLc--10DcLq+5FqqL=Gqc. Quæ in numeris, ſtatuendo L(radicem)47, erit 1qc-15qq+160c-1250q+6480l=170304782. vel omiſſa *unciarum* diſtinctione, pro 15qq, dic BLqq, pro 160c, dic CqLc; pro 1250q, dic DcLq; & pro 6480l, dic FqqL. Nam ſi L ſit 47; erit Lq=2209: & Lc=103823: & Lqq=4879681: & Lqc=229345007.

Conſtructionis hujus Practica.

| | | |
|---|---|---|
| BLqq<br>15×4879681 | 229345007<br>-73195215 | Lqc |
| CqLc<br>160×103823 | 156149792<br>+16611680 | |
| DcLq<br>1250×2209 | 172761472<br>—2761250 | |
| FqqL<br>6480×47 | 170000222<br>+ 304560 | |
| | 170304782 | Gqc |

2. Pro-

2. Proponatur Æquatio quæcunque, puta modò inventam.
1qc-15qq+160c-1250q+6480l=17030478 2:
Vel, numeris in ſymbola mutatis,
Lqc-BLqq+CqLc—DcLq+FqqL=Gqc:
Et ſi plures eſſent affectionum Species, conſequenter efferri poterunt per Hcc, Kqqc, Mqcc, Nccc, & ſic ulterius.

3. Radicis L ex his inveſtigandæ duæ erunt partes, nempe A latus primum, & E latus ſecundum, ſive ſubſequens quodlibet. Quare L=A+E: & omnes poteſtates ex L, æqualiter conſimilibus poteſtatibus ex A+E: v. g. Lq=Aq+2AE+Eq: & Lc=Ac+3AqE+3AEq+Ec. &c.

Qui igitur numeroſam hanc poteſtatum affectarum reſolutionem cupit addiſcere, eum in purarum poteſtatum Geneſi & Analyſi, bene verſatum eſſe oportet.

4. In Æquatione propoſitâ, poteſtas reſolvenda 17030478 2, ſive Gqc, eſt Quadrato-cubica, cujus etiam generis ſunt ſingulæ affectionum Species. Nam *Heterogenea inter ſe nec addi poſſunt, nec ſubtrahi.*

5. Quare in ſingulis affectionibus duo ſunt conſideranda, Gradus affectionis & Coëfficiens: ut in 15qq, affectionis gradus eſt Quadrato-quadraticus, & coëfficiens 15, lateralis: In 160c, affectionis Gradus eſt cubicus, & Coëfficiens 160, Quadraticus: In 1250q, affectionis Gradus eſt Quadraticus, & coëfficiens 1250, cubicus: deniq; in 6480l, affectionis gradus eſt lateralis, & coëfficiens 6480, Quadrato-quadraticus: ſicut ex utraque Æquationis deſigna-

ſignatione comparata clariſſimè liquebit. Atque hinc duo oriuntur Conſectaria pro laterum ſingularium extractione.

6. Primum Conſectarium eſt, Si coefficientis pro ſua ſpecie, radix, ducta in affectionis gradum, multiplicet ipſum coefficientem: factus erit ejuſdem generis cum poteſtate reſolvenda: Ut in præcedente Æquatione, ſi latus 15 Quadrato-quadraticè multiplicatū, ducatur in 15; & ſi √q 160 cubatum, ducatur in Quadratum 160; & ſi √c 1250 quadratum, ducatur in cubum 1250; denique ſi √qq 6480 ducatur in Quadrato-quadratum 6480; ex ſingulis hiſce multiplicationibus emerget numerus Quadrato-cubicus. *Atque hæc multiplicatio Analytica, modus eſt reducendi coëfficientem quemlibet ad ſpeciem poteſtatis reſolvendæ*, in lateris primi ſingularis extractione uſitatiſſimus.

7. Unde etiam clariſſimè liquet, quod ſi numerus ex coefficientibus hoc modo reductis, atque comparatis, emergens, minor ſit poteſtate reſolvenda, latus ipſius etiam minus eſt latere poteſtatis reſolvendæ; Si verò major, eſt majus; & ſi æqualis, æquale. In hac igitur Æquatione, 1qc-15qq + 160c-1250q+6480 l =1703047 82; vel 1703047 82+15qq-160c+ 1250q-6480 l=1qc; ſi tum coefficiens lateralis 15, tum √q160, tum √c 1250, tum √qq 6480, Quadrato-cubentur; prodibunt quatuor affectionum ſpecies homogeneæ, nempe 7593.., 3238.., 1450.., 0581.., Quod quidem per Logarithmos facillime fit, ſatiſque pro propoſito accuratè. Operationis ratio, ex fine hu-

jus

jus Tractatus (ubi de Logarithmorum notitiâ pauca traduntur) petenda, sic est. (Vide Sect. 27, una cum pag. 149, &c.)

| Logarithmi. | Numeri Coëfficientes. |
|---|---|
| 1)2)3)4) | sunt dimensiones in Coëfficiente. |
| 1) 5x1, 17609 | 1599 |
| 5,88045 | +7593.. |
| 2)2, 20412 | 1600 |
| 5x1, 10206. 12\|65 | |
| 5,51030 | -3238.. |
| 3)3, 09691 | 12509 |
| 5x1, 03230. 10\|8- | |
| 5, 16150 | +1450.. |
| 4)3, 81157 | 64801 |
| 5x0, 95289. 8\|97 | |
| 4, 76445 | -0581.. |

In Æquatione igitur proposita, speciebus pro signorum ratione in unam summam aggregatis, erit 1703047oo + 759300—323800 + 145000—058100=1qc=17082700. Quod etiam in aliis æquationibus similiter fieri poterit.

8. Secundum est, Si potestas resolvenda per Coefficientem dividatur, quotus ad ipsum affectionis gradum referretur: hoc est, quotus erit latus, si affectio sit sub latere; vel quadratum si sub quadrato; & sic de reliquis gradibus: Ut in priore Æquatione, si 17030478 2 divi-

dividatur per 15, quotus erit Quadrato-quadraticus; si per 160, quotus erit cubicus; si per 1250, quotus erit Quadraticus; si denique per 6480, quotus erit lateralis. Quare non semper ipse quotus, sed ipsius plerumque radix pro affectionis gradu, erit latus singulare eliciendum.

9. In secundæ etiam radicis investigatione hoc teneri debet; quòd pro numero figuram in quoto censendus fere erit ejus gradus: ut si quotus unica constet figura, sit latus; Si duabus, Quadratum; si tribus, cubus, &c. Et si quotus superet 5, vel 50, vel 500, &c. ad gradum fortasse sequentem, in grandioribus præsertim affectionibus, poterit extendi. Atque *hæ sunt divisionis Analyticæ leges.*

10. Nec in istiusmodi *Multiplicatione* atque *Divisione*, totam potestatem resolvendam, cum toto Coëfficiente, percurrere opus erit; sed solummodo ad punctum congruens proximum.

11. Nam in resolutione affectarum Æquationum punctationes omnes graduum fieri debent, in potestate resolvenda, sicut in puris: Supremi quidem gradus supra: reliquorum verò infrà. Coëfficientes etiam, pro sua quisque specie, punctandi sunt. Prioris exempli punctationes sic erunt,

1qc-15qq+160c-1250q+06480l=17030478 2

. . . . . .

. .

12. De-

12. Debet autem regulariter (præſertim ſi Coefficiens ſit negativus) numerus punctorum in ſingulis eſſe æqualis. Quare ſi poteſtas reſolvenda puncta plura, ſive pauciora habeat ſupra ſe, quam Coefficiens; tot deficienti præponantur circuli, ut puncta utrobique poſſint eſſe æqualia. Et in ſingulis lateribus eruendis punctum coëfficientis lateri illi proprium, ad parile poteſtatis reſolvendæ punctum ſuperius, accommodandum eſt: quod quidem fiet, ſi unitatis locus in coëfficiente, ad puncta poteſtatis inferiora gradui ſuo convenienta, ordine dimoveantur.

13. Si Coëfficiens aliquis ſit fractio, ſive latus ſurdum; reducatur ad integros cum partibus decimalibus.

14. Et ſi opus ſit radicis eductionem in partibus decimalibus perſequi: poſt lineam ſeparatricem circulos quot viſum erit adſcribes, eoſque ſupra & ſubtus, punctis conſimiliter inſignire perges.

15. Tabula oſtendens tum *Diviſores*, tum *Gnomones*, pro laterum ſingularium in Æquationibus affectis inveſtigatione; collecta & continuanda ex tabella Analytica poſteriore. Et nota, quod Coëfficientis cujuſque ſpecies omnes ſunt affirmatæ, ſi ipſa ſit affirmata; negatæ vero, ſi negata.

| Pro Primo Latere. | Pro Lateribus ſingularibus ſequentibus, ad complendum *Gnomonem.* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Aq<br>BA | 2AE .<br>BE . | Eq } =Cq | | | |
| Ac<br>BAq<br>CqA | 3AqE .<br>B2AE .<br>CqE . | 3AEq.<br>BEq. | Ec } =Dc | | |
| Aqq<br>BAc<br>CqAq<br>DcA | 4AcE .<br>B3AqE .<br>Cq2AE .<br>DcE . | 6AqEq.<br>B3AEq.<br>CqEq. | 4AEc.<br>BEc. | Eqq } =Fqq | |
| Aqc<br>BAqq<br>CqAc<br>DcAq<br>FqqA | 5AqqE .<br>B4AcE .<br>Cq3AqE .<br>Dc2AE .<br>FqqE . | 10AcEq.<br>B6AqEq.<br>Cq3AEq.<br>DcEq. | 10AqEc.<br>B4AEc.<br>CqEc. | 5AEqq .<br>BEqq . | Eqc<br>&c. } =Gqc |

16. *Divisores* ubique sumuntur ex iis, quæ in data habentur mensura, justo ordine dispositis, atque aggregatis, habita signorũ ratione.

17. Si Æquationis alicujus suprema potestas sit negativa, Æquatio illa est ambigua.

18. Latus singulare primum elicitur ex his *Regulis*, desumptis ex duobus consectariis in Sect. 6. & 8.

*Prima.* Si Coefficiens ita longè in posteriora decedit, ut vix ad primum potestatis resolvendæ punctum pertingat; nec (Analyticè etiam reductus) enormem in illo mutationem faciat: in extractione lateris singularis primi, negligi omninò poterit.

*Secunda.* Si Coefficiens in anteriora prorumpit, sitque affirmativus: devolvendus est in puncta consequentia, donec locus divisioni fiat. Per quam divisionem quotus inventus ad gradum affectionis referretur. Quod etiam in extractione minoris radicis Æquationis ambiguæ intelligi debet.

*Tertia.* Si vero negativus sit, & pluribus constet punctis, quam potestas resolvenda; suppleantur loci deficientes circulis præfixis: & pro latere primo singulari, sumatur ipsa coefficientis, pro suo genere, radix.

*Quarta.* Si utrobique puncta sint æqualia, & numeri in primo tum coefficientis, tum potestatis resolvendæ, puncto, non multum discrepent: Coefficiens per radicem suam, pro specie qua punctatur, sub congruente puncto extractam, ad potestatis speciem (per Analyticam multiplicationem) reductus, potestati resolvendæ

vendæ addatur, si sit negativus; vel auferatur, si affirmativus. Nam si sit Ac±CqA=Dc, erit Ac=Dc∓CqA. At si Æquationis ambiguæ latus majus quæratur, Potestas resolvenda è coefficiente reducto auferatur. Nam si sit CqA-Ac =Dc, erit Ac=CqA-Dc. tum summæ vel differentiæ radix, erit latus primũ eliciendũ. Et nota, quod Æquationis ambiguæ latus majus, aliquando per divisionem; aliquando per extractionem radicis è coefficiente; sed plerumque per reductionem coefficientis investigatur.

19. Atque his præceptis solerter perpensis, Illud demùm verum latus singulare primum erit, quod primò omnium talem exhibet diagonalem, qui unà cum coefficientibus, sicut Æquationis conditio postulat, juxta tabellam præcedentem, multiplicatis; omnibusque in unam summam (diligente ubique tum signorum, tum sedium, respectu habito) aggregatis; numerum profert potestate resolvendâ, unde subtrahendus est, non majorem. Notandum autem est, quod numerus negativus quantuscunque, minor est omni tum affirmativo, tum negativo minore: ut -4 minor est quam 1, & quam -1. Item quòd subductio mutat signum numeri subducendi: ut ex 4 tolle 6, restat 4-6, hoc est -2. Et ex -4 tolle -6, restat -4+6, hoc est 2. Deniq; ex 4 tolle -6, restat 4+6, hoc est 10. Quare in lateris primi singularis extractione, tentandum aliquoties est, donec latus verũ inveneris; quod per proximè majus, certissimè agnosces.

20. In constitutione divisoris pro secundo latere investigando; Coefficientis ductæ in gra-

gradū quemlibet, ſedes ordinari debet ſecundū proprii gradus punctationem; hoc eſt, Coëfficientis ſublatere ſedes diſtabit verſus ſiniſtram, à puncto ſive ſede ipſius Coëfficientis, uno loco: Coëfficientis ſub quadrato ſedes, duobus locis: ſub cubo, tribus: &c. Et ob vitandam confuſionem, utile erit in reſiduo poteſtatis reſolvendæ, punctationes illas, quæ præſenti radici eruendæ inſerviunt, ſolas diſtinguere.

21. Tum latus ſingulare ſecundum elicietur ſic: Diviſores cujuſq; generis, ex tabula præcedente inventi, & juſto ordine diſpoſiti, in unam ſummam aggregentur; & per totalem illū diviſorem, reliquū poteſtatis reſolvendæ dividatur. Nam quotus juxta diviſionis Analyticæ leges (ſi id uſus exigat) perpenſus, dabit latus ſingulare ſecundū eliciendū. Cæterùm in hac inveſtigatione multotiès, præſertim ſi magnitudinum dividentium negativarū aggregatū, aggregato affirmativarum penè æquetur (adeò ut Diviſor Reliquo poteſtatis reſolvendæ minor admodum ſit) maxima ineſt lubricitas: quam tamen Analyſta ſagax facile effugiet.

22. Hæc igitur Regula eſto perpetua. Illud demùm verū latus ſingulare ſecundū eſt, quod primò omnium talem exhibet *Gnomonem*, conſtantem ex complementis cujuſque generis, & Coëfficientibus, ſicut Æquationis conditio poſtulat, juxta tabulam præcedentem, multiplicatis; omnibuſq; in unam ſummā, diligente ubiq; tū ſignorū, tū ſediū, habita ratione, aggregatis; qui *Gnomon* non major ſit poteſtate reſolvenda unde ſubtrahendus eſt. Quare tentandū aliquoties

ties eſt, donec latus verũ inveneris: quod etiã per proximè majus, certiſſime agnoſces.

23. Latera omnia ſingularia poſt ſecundum, perDiviſionem ſimplicẽ facillimè acquiruntur.

24. Si affectiones ſint compoſitæ ex affirmativis, & negativis: antecedentia præcepta mixtim ſunt cum ſolertia & judicio uſurpanda. Et in lateribus æſtimandis præponderabit ſemper affectio major, minori. Verùm totum hoc negotium Analyticum, quod verbis enarrare difficillimum foret, frequens exercitatio, tum in Geneſi, tum in Analyſi poteſtatum cujuſque generis, facile ſatis reddet, atque familiare.

25. Sed quia ſuperius aliquoties dictum eſt, tentatu opus eſſe; quod quidem in affectionibus multiplicibus, & ubi gradus ſunt elatiores, valde laborioſum erit: apponam hic, coronidis loco, duos modos ejuſmodi tentamenti levandi: unum per Depreſſionem, ex *Cap.* XVI. Sect. 7. *Clavis*: alterum per Canonem Logarithmorum 10000. In utroque autem ſi Æquatio fuerit ambigua, ſigna ejus omnia erunt mutanda. Notandum etiam hic eſt, quod numerus negativus quantuſcunque, minor eſt omni tum affirmativo, tum negativo minore.

26. Inventio laterum ſingularium per Depreſſionem. Si latus primum quæratur: In ſingulis Æquationis datæ ſpeciebus abſcindantur lineâ ſeparatrice omnia puncta poſt primum. Deinde applicentur omnes ſpecies ad latus; hoc eſt, deprimantur uno gradu.

Exem. I. 1qq-72c+238600l=8725815. Hæc Deprimendo fiet 1c+238|6-7|2q=L)8725. Eſto A 4. Erit 4)8725(2181, juſtus. Et

Et + 64 + 238|6 − 115|2 = 187|4, minor justo.
Esto A 5. Erit 5)872|5(174|5, justus.
Et + 125 + 238|6 − 180|0 = 183|6; major justo. Latus igitur verum A = 5-1, hoc est, 4.

Exempl. II. De Æquatione ambigua. 1c-32 57| = -45744. Hæc deprimendo fiet 1q-32|5 = L)-45|7.
Esto A 4. Erit 4) − 45|7(−11|4, justus.
Et + 16 − 32|5 = −16|5, minor justo.
Esto A 5. Erit 5) − 45|7(−9|1, justus.
Et + 25 − 32|5 = −7|5, major justo.
Latus igitur verum A = 5 − 1, hoc est, 4.

Si latus secundum quæratur: In singulis speciebus abscindantur omnia puncta post secundum. Deinde applicentur omnes species ad quadratum; hoc est, deprimantur duobus gradibus. Ut in Exemplo I.

1qq − 72c + 238600l = 8725815. Hæc Deprimendo fiet 1q + L) 238600-72l = Q) 8725815.
Esto A 47: erit 2209)8725815(3949. justus.
Et 2209 + 5077 − 3384 = 3902. minor justo.
Esto A 48: erit 2304)8725815(3787. Justus.
Et 2304 + 4971 - 3456 = 3819: major justo.
Latus igitur verum est 48 − 1, hoc est, 47.

27. Inventio lateris singularis secundi per *Logarithmos*.

Index Logarithmi cujusque desumitur ex tabella in initio *Clav.* pro distantia primæ suæ figuræ, ante vel post locum unitatum, cujus Index est 0. Eædem igitur figuræ, eodem or-

dine diſpoſitæ, eundem habent Logarithmum. Indices vero diverſi eſſe poſſunt. Ut numeri 436, Log: eſt 2,6394865: at numeri 43600, eſt 4,6394865, & numeri 4|36, Log: eſt 0,6394865. Denique numeri 0|00436, Log: eſt $\bar{3}$,6394865.

Summa duorum Logarithmorum, Logarithmus eſt facti à valoribus: differentia autem Logarithmus eſt quoti. Ut quia 4|36×9=39|24 hujus Logar. 1, 5937290 = 0, 6394865 + 0,9542425. Et quia 9)39|24(4|36: hujus Log: 0, 6394865=1,5937290−0,9542426.

Logarithmus lateris, ductus in numerum dimenſionum cujuſque poteſtatis, eſt ejuſdem poteſtatis Logarithmus: Ut quia numeri 436, Log: eſt 2,6394865: Erit 2,6394865×2=Log: Q: 436. Et 2, 6394865×3=Log: C: 436: Et 2, 6394865×4=Log: QQ: 436, &c.

Logarithmus poteſtatis cujuſque diviſus per numerum dimenſionum ſuarum, exhibet Logarithmum radicis ſuæ.

Si in Serie Geometricè continuè proportionalium Logarithmus primi termini tollatur è Logarithmo ſecundi, reliquus erit Logarithmus rationis: Qui, ſi in numerum terminorum minus uno (qui numerus eſt rationum) ducatur; deindeque Logarithmo primi termini augeatur; Logarithmus erit termini ultimi.

28. Atque hæc de Logarithmorum notitia ſatis ſunto: quibus intellectis, reliquam operationem, exempla ſequentia diligenter inſpecta, facilem reddent: In qua etiam omnes punctationes, poſt duas primas, linea ſeparatrice abſcindendæ ſunt. Ex-

Exempl. I. $1qq-72c+238600l=872815$. Justus. Sunto duo prima latera singularia.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 47. 1,67209 | 8 | —72 | +238600 |
| Cu: 5,01629 | | 1,85733 | 5,37767 |
| QQ: 6,68839 | | 5,01629 | 1,67210 |
| | | 6,87362 | 7,04977 |
| | | +4880... | —7475... +11213... |

Et $+4880... +11213... -7475... = +8618...$ minor justo.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 48. 1,68124 | 1 | 1,85733 | 5,37767 |
| Cu. 5,04372 | | 5,04372 | 1,68124 |
| QQ. 6,72496 | | 6,90105 | 7,05891 |
| | | +5308... | —7963... +11455... |

Et $+5308+11455-7963=48800...$ major justo.
Radix igitur vera erit 48—1, hoc est, 47.

Exempl. II. $1c-3257l=-45744$. Justus Sunto duo prima latera singularia.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | —3257 | |
| 48. 1,68124 | 1 | 3,51282 | |
| Cu. 5,04372 | | 1,68124 | |
| | | +1106 | 5,19406 |
| | | | —1563 non major.) |

$+1106-1563=-457$, minor justo, (saltem

| | | | |
|---|---|---|---|
| 49. 1,69019 | 6 | 3,51282 | |
| Cu. 5,07059 | | 1,69020 | |
| | | +1176 | 5,20302 |
| | | | —1596 |

$+1176-1596=-420$; major justo.
Radix igitur vera erit 49—1, hoc est, 48.

Latus ſecundum inveſtigari poterit per Logarithmos, etiam Depreſſione præcedente. Ut in Exemplo V. $1qq - 1246|00q = 08972|6156$. Hæc quadraticè depreſſa fiet $1q - 1246 = Q\,8972|6$.

Supponantur duo prima latera ſingularia,

| | 8972\|61 |
|---|---|
| 34. 1,53148 | 3,95337 |
| Q. 3, 06296 | 3,06296 |
| + 1156 | 0,89041: valor 7\|76 Juſtus. |

$+1156 - 1246 = -90$: minor juſto.

| | |
|---|---|
| 36. 1,55630 | 3,95337 |
| Q. 3, 11260 | 3,11260 |
| +1296 | 0,84077: valor 6\|93 Juſtus. |

$+1296 - 1246 = +50$: major juſto.

Radix igitur vera cadit inter 34 & 36.

Atque hoc modo in XXVIII Sectionibus, ſive Præceptis (qui numerus eſt perfectus) doctrinam de Æquationum affectarum reſolutione in numeris, adjuvante Deo omnium bonorum Datore, expedivi: Ejus igitur ſit omnis laus, honor, & gloria in ſempiternum. *Amen.*

*Exempl*

## *Exempla quædam Æquationum Resolutarum in Numeris.*

ÆQuationum Quadraticarum, omniumque in quibus sunt tres species in ordine scalæ æqualiter adscendentes, Analysi supersedebo: quia in cap. XVI. Sect. 9. *Clavis*, modus facilior traditus est, quàm per generalem hanc methodum præstari poterit: Et ad Exempla Æquationum aliter affectarum progrediar. Denique in fine, Notas ad Exempla, subjungam; in quibus operationis ratio, in literum singularium investigatione, ex præceptis superiùs traditis, aperietur.

Initium faciam à Resolutione numerosæ Æquationis primò constitutæ, Nempe

$1qc-15qq+160c-1250q+6480l=170\dot{3}0478\dot{2}$

Hoc est, $Lqc-BLqq+CqLc-DcLq+FqqL=Gqc$

Exemplum I.

1qc-15qq+160c--1250q+06480l=17030478
Hoc est, Lqc-BLqq+CqLc-DcLq+FqqL=Gqc

| | | |
|---|---|---|
| 1703 | 04782 | (47 |
| 1 | 5 | —B |
| 1 | 250 | —Dc |
| 1 | 60 | Cq |
| | 6480 | Fqq |
| 1024 | | Aqc |
| 102 | 40 | CqAc |
| 2 | 5920 | FqqA |
| +1128 | 9920 | |
| 384 | 0 | —BAqq |
| 20 | 000 | —DcAq |
| —404 | 000 | |
| 724 | 9920 | *Ablatit.* |
| R 978 | 05582 | |
| 128 | 0 | 5Aqq |
| 6 | 40 | 10Ac |
| | 160 | 10Aq |
| | 20 | 5A |
| 7 | 680 | Cq3Aq |
| | 1920 | Cq3A |
| | 160 | Cq |
| | 6480 | Fqq |

+142

| | | |
|---|---|---|
| +142 | 50040 | |
| 38 | 40 | -B4Ac |
| 1 | 440 | -B6Aq |
| | 240 | -B4A |
| | 15 | -B |
| 1 | 0000 | -Dc2A |
| | 1250 | -Dc |
| —40 | 87665 | |
| +101 | 62375 | *Divisor.* |
| 896 | 0 | 5AqqE |
| 313 | 60 | 10AcEq |
| 54 | 880 | 10AqEc |
| 4 | 8020 | 5AEqq |
| | 16807 | Eqc |
| 53 | 760 | Cq3AqE |
| 9 | 4080 | Cq3AEq |
| | 54880 | CqEc |
| | 45360 | FqqE |
| +1333 | 62047 | |
| 268 | 80 | -B4AcE |
| 70 | 560 | B6AqEq |
| 8 | 2320 | -B4AEc |
| | 36015 | -BEqq |
| 7 | 0000 | -Dc2AE |
| | 61250 | -DcEq |
| -355 | 56465 | |
| +978 | 05582 | *Ablatit.* |

## Exemplum II.

$1c + 420000l = 24\dot{7}65\dot{1}71\dot{3}$

Hoc est, $\dot{L}c + CqL = Dc$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 24$\dot{7}$ | 65$\dot{1}$ | 71$\dot{3}$ | (417 |
| | 42 | 000 | 0 | Cq |
| | 64 | | | Ac |
| | 168 | 000 | 0 | CqA |
| | 232 | 000 | 0 | *Ablatit.* |
| R | 15 | 65$\dot{1}$ | 71$\dot{3}$ | |
| | 4 | 8 | | 3Aq |
| | | 12 | | 3A |
| | 4 | 200 | 00 | Cq |
| | 9 | 120 | 00 | *Divisor.* |
| | 4 | 8 | | 3AqE |
| | | 12 | | 3AEq |
| | | 1 | | Ec |
| | 4 | 200 | 00 | CqE |
| | 9 | 121 | 00 | *Ablatit.* |
| R | 6 | 530 | 71$\dot{3}$ | |
| | | 504 | 3 | 3Aq |
| | | 1 | 23 | 3A |
| | | 420 | 000 | Cq |
| | | 925 | 530 | *Divisor.* |
| | 3 | 530 | 1 | 3AqE |
| | | 60 | 27 | 3AEq |
| | | | 343 | Ec |
| | 2 | 940 | 000 | CqE |
| | 6 | 530 | 713 | *Ablatit.* |

| | |
|---|---|
| 4 | 1 |
| 16 | |
| | 8 |
| | 1 |
| 16 | 81 |

Ex-

1c+1007q=247617936. Lc+BLq=Dc.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 247 | 617 | 936 | ( 417 |
| 10 | 07 | | B |
| 64 | | | Ac |
| 161 | 12 | | BAq |
| 225 | 12 | | *Ablatit.* |
| R 22 | 497 | 936 | |
| 4 | 8 | | 3Aq |
| | 12 | | 3A |
| 8 | 056 | | B2A |
| | 100 | 7 | B |
| 13 | 076 | 7 | *Divisor.* |
| 4 | 8 | | 3AqE |
| | 12 | | 3AEq |
| | 3 | | Ec |
| 8 | 056 | | B2AE |
| | 100 | 7 | BEq |
| 13 | 077 | 7 | *Ablatit.* |
| R 9 | 420 | 236 | |
| | 504 | 3 | 3Aq |
| | 1 | 23 | 3A |
| | 825 | 74 | 2BA |
| | 1 | 007 | B |
| 1 | 332 | 277 | *Divisor.* |
| 3 | 530 | 1 | 3AqE |
| | 60 | 27 | 3AEq |
| | | 343 | Ec |
| 5 | 780 | 18 | B2AE |
| | 49 | 343 | BEq |
| 9 | 420 | 236 | *Ablatit.* |

| | |
|---|---|
| 4 | 1 |
| 16 | |
| | 8 |
| | 1 |
| 16 | 81 |

Exemplum IV.

$$1qq - 44299005l = 022252086$$

$$Lqq - DcL = Fqq.$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 2225 | 2086 | (354 |
| --44 | 2990 | 05 | —Dc |
| +81 | | | Aqq |
| --132 | 8970 | 15 | —DcA |
| --51 | 8970 | 15 | *Ablatit.* |
| R 52 | 1195 | 3586 | |
| 10 | 8 | | 4Ac |
| | 54 | | 6Aq |
| | 12 | | 4A |
| +11 | 352 | | |
| --4 | 4299 | 005 | —Dc |
| +6 | 9220 | 995 | *Divisor.* |
| 54 | 0 | | 4AcE |
| 13 | 50 | | 6AqEq |
| 1 | 500 | | 4AEc |
| | 625 | | Eqq |
| +69 | 0625 | | |
| --22 | 1495 | 025 | —DcE |
| +46 | 9129 | 975 | *Ablatit.* |
| R 5 | 2065 | 3836 | |
| +1 | 2793 | 7395 | *Divisor.* |
| +5 | 2065 | 3836 | *Ablatit.* |

Ex-

Exemplum V.

$1qq-1246000q=08972625,Lqq-CqLq=Fqq$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 3972 | 6256 | ( 354 |
| -12 | 4600 | | -Cq |
| + 81 | | | Aqq |
| -112 | 1400 | | -CqAq |
| -31 | 1400 | | *Ablatit* |
| R 32 | 0372 | 6256 | |
| 10 | 8 | | 4Ac |
| | 54 | | 6Aq |
| | 12 | | 4A |
| + 11 | 352 | | |
| -7 | 4760 | 0 | -Cq2A |
| - | 1246 | 00 | -Cq |
| -7 | 6006 | 00 | |
| + 3 | 7514 | 00 | *Divisor.* |
| 54 | 0 | | 4AcE |
| 13 | 50 | | 6AqEq |
| 1 | 500 | | 4AEc |
| | 625 | | Eqq |
| + 69 | 0625 | | |
| -37 | 3800 | 0 | -Cq2AE |
| -3 | 1150 | 00 | -CqEq |
| -40 | 4950 | 00 | |
| + 28 | 5675 | 00 | *Ablatit.* |
| R 3 | 4697 | 6256 | |
| | 8489 | 1800 | *Divisor.* |
| + 3 | 4697 | 6256 | *Ablatit.* |

Ex-

Exemp. VI

1qq − 340c = 6210666096. Lqq − BLc = Fqq.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 2106 | 6096 | (354 |
| −2 | 40 | | −B |
| +81 | | | Aqq |
| −91 | 80 | | BAc |
| −108 | 0 | | *Ablatit.* |
| R 17 | 0106 | 6096 | |
| 10 | 8 | | 4Ac |
| | 54 | | 6Aq |
| | 12 | | 4A |
| +111 | 352 | | |
| −9 | 180 | | -B3Aq |
| − | 3060 | | -B3A |
| | −340 | | -B. |
| −9 | 4894 | 0 | |
| +1 | 8626 | 0 | *Divisor.* |
| 54 | 0 | | 4AcE |
| 135 | 0 | | 6AqEq |
| 25 | 00 | | 4AEc |
| | 625 | | Eqq |
| +69 | 0625 | | |
| −45 | 900 | | -B3AqE |
| −76 | 500 | | -B3AEq |
| − | 4250 | 0 | -BEc |
| −53 | 9750 | | |
| +15 | 0875 | 0 | *Ablatit.* |
| R 1 | 9231 | 6096 | |
| + | 4692 | 9060 | *Divisor.* |
| +1 | 9231 | 6096 | *Ablatit.* |

Exempl.

## Exemplum VII.

1qq--77108000l=08553057̇6.Lqq--DcL=Fqq.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 8553 | 0576 | (426 | |
| --77 | 1080 | 00 | --Dc | |
| +256 | | | Aqq | |
| --308 | 4320 | 00 | —DcA | |
| --52 | 4320 | 00 | *Ablatit.* | |
| R 53 | 2873 | 0576 | | 4.2 |
| 25 | 6 | | 4Ac | 16 |
| | 96 | | 6Aq | 16 |
| | 16 | | 4A | 4 |
| +26 | 576 | | | 1764 |
| --7 | 7108 | 000 | --Dc | |
| +18 | 8652 | 000 | *Divisor.* | |
| 51 | 2 | | 4AcE | |
| 3 | 84 | | 6AqEq | |
| | 128 | | 4AEc | |
| | 16 | | Eqq | 4..2 |
| +55 | 1696 | | | 64 |
| --15 | 4216 | 000 | —DcE | 96 |
| +39 | 7480 | 000 | *Ablatit.* | 48 |
| R 13 | 5393 | 0576 | | 8 |
| +2 | 2030 | 4080 | *Divisor.* | 74088 |
| +13 | 5393 | 0576 | *Ablatit.* | |

Exempl.

Exemplum VIII. Triſectionis.

$32001 - 1c = 46577$ Æquatio eſt ambigua.

$CqL - Lc = Dc$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 46 | 577 | ( 47 | *Radix major.* |
| 32 | 00 | Cq | |
| -64 | | -Ac | |
| + 128 | 00 | CqA | |
| + 64 | 00 | *Ablatit.* | |
| R - 17 | 423 | | |
| -4 | 8 | -3Aq | |
| - | 12 | -3A | |
| -4 | 92 | | |
| +3 | 200 | Cq | |
| -1 | 720 | *Diviſor.* | |
| -33 | 6 | -3AqE | |
| -5 | 88 | -3AEq | |
| - | 343 | -Ec | |
| -39 | 823 | | |
| +22 | 400 | CqE | |
| -17 | 423 | *Ablatit.* | |
| R 00 | 000 | | |

Exempl.

Exemplum IX. Trisectionis.

$$32001 - 1c = 46577$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 46 | 577 | Dc | (15\|7 *Radix minor.* |
| 32 | 00 | Cq | |
| --1 | | Ac | |
| +32 | 00 | CqA | |
| 31 | 00 | *Ablatit.* | |
| R 15 | 577 | | |
| -- | 3 | -3Aq | |
| -- | 3 | -3A | |
| -- | 33 | | |
| + 3 | 200 | Cq | |
| 2 | 870 | *Divisor.* | |
| -1 | 5 | -3AqE | |
| -- | 75 | -3AEq | |
| -- | 125 | -Ec | |
| --2 | 375 | | |
| +16 | 000 | CqE | |
| 13 | 625 | *Ablatit.* | |
| R 1 | 952 | 000 | |
| | 252 | 05 | *Divisor.* |
| | 745 | 107 | *Ablatit.* |
| R 1 | 206 | 893 | 000 &c. |

Exempl.

Exemplum X.

$53q - 1c = 13254$ Æquatio est ambigua.

BLq — Lc = Dc

| | | |
|---|---|---|
| 13 | 254 | (47 Radix major. |
| 5 | 3 | B |
| -64 | | -Ac |
| +84 | 8 | BAq |
| +20 | 8 | *Ablatit.* |
| R--7 | 546 | |
| --4 | 8 | -3Aq |
| -- | 12 | -3A |
| --4 | 92 | |
| 4 | 24 | B2A |
| | 53 | B |
| + 4 | 293 | |
| — | 627 | *Divisor.* |
| --33 | 6 | -3AqE |
| --5 | 88 | -3AEq |
| -- | 343 | -Ec |
| --39 | 823 | |
| 29 | 68 | B2AE |
| 2 | 597 | BEq |
| +32 | 277 | |
| --7 | 546 | *Ablatit.* |
| R 0 | 000 | |

Exempl.

Exemplum XI.

$$539q - 1c = 13254.$$

$$BLq - Lc = Dc.$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 13 | 254 | (20 | 05 | *Radix minor.* |
| 5 | 3 | B | | |
| --8 | | -Ac | | |
| 21 | 2 | BAq | | |
| 13 | 2 | *Ablatit.* | | |
| R | 54 | 000 | 000 | |
| | -12 | 00c | 0 | --3Aq |
| | | --6 | 00 | --3A |
| | --12 | 006 | 00 | |
| | 21 | 200 | | B2A |
| | | 5 | 3 | B |
| | +21 | 205 | 3 | |
| | 9 | 199 | 30 | *Divisor.* |
| | -60 | 000 | 0 | --3AqE. |
| | -- | 150 | 00 | --AEq |
| | | - | 125 | --Ec |
| | --60 | 150 | 125 | |
| | 106 | 000 | | B2AE. |
| | | 132 | 5 | BEq |
| + | 106 | 132 | 5 | |
| | 45 | 982 | 375 | *Ablatit.* |
| R | 8 | 017 | 625 | 000 &c. |

Exempl.

Exemplum XII. Trisectionis.

$$\dot{6}\dot{0}\dot{0}\dot{3}\dot{4}l - 1c = \dot{1}02\dot{3}76\dot{8}$$

$$CqL - Lc = Dc.$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\dot{1}$ | $02\dot{3}$ | $76\dot{8}$ | (236 Radix major. |
| 6 | 003 | 4 | Cq |
| —8 | | | -Ac |
| +12 | 006 | 8 | CqA |
| + 4 | 006 | 8 | *Ablatit.* |
| R-2 | $98\dot{3}$ | $0\dot{3}\dot{2}$ | |
| —1 | 2 | | -3Aq |
| | —6 | | -3A |
| --1 | 26 | | |
| + | 600 | 34 | Cq |
| — | 659 | 66 | *Divisor.* |
| -3 | 6 | | -3AqE |
| - | 54 | | -3AEq |
| | -27 | | -Ec |
| -4 | 167 | | |
| + 1 | 801 | 02 | CqE |
| -2 | 365 | 98 | *Ablatit.* |
| R-- | 617 | $05\dot{2}$ | |
| | --96 | 366 | *Divisor.* |
| | 617 | 052 | *Ablatit.* |

Exem. XIII.

Exemplum XIII.

$$600341 - 1c = 1023768$$

(017 | 1369 *Radix minor.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 023 | 768 | | |
| | 600 | 34 | Cq | |
| | --1 | | --Ac | |
| + | 600 | 34 | CAq | |
| + | 599 | 34 | *Ablatit.* | |
| R | 424 | 428 | | |
| | - | 3 | --3qA | |
| | | --3 | --3A | |
| | -- | 33 | | |
| | 60 | 034 | Cq | |
| | 59 | 704 | *Divisor.* | |
| | --2 | 1 | --3AqE | |
| | --1 | 47 | --3AEq | |
| | - | 343 | --Ec | |
| | --3 | 913 | | |
| + | 420 | 238 | CqE | |
| + | 416 | 325 | *Ablatit.* | |
| R | +8 | 103 | 000 | |
| | 5 | 916 | 19 | *Divisor.* |
| | 5 | 916 | 189 | *Ablatit.* |
| R | 2 | 186 | 811 | 000 |
| | | 591 | 562 | 57 *Divisor.* |
| | 1 | 774 | 656 | 903 *Ablatit.* |
| R | | 412 | 154 | 097 000 |
| | | 59 | 153 | 637 91 *Divisor.* |
| | | 354 | 920 | 285 544 *Ablatit.* |
| R | | 57 | 233 | 811 456 000&c. |

Exemplum XIV.

$1qq - 72c + 238600 = 872581\dot{5} \,\lfloor\, 705\dot{6}$

$Lqq - BLc + DcL = Fqq.$

| | | |
|---|---|---|
| 872581 5 | 705 6 (47 6 | |
| -72 | | --B |
| + 238600 | | Dc |
| 256 | | Aqq |
| 954400 | | DcA |
| +1210400 | | |
| --4608 | | -BAc |
| + 749600 | | *Ablatit.* |
| R 1229815 | 7056 | |
| 256 | | 4Ac |
| 96 | | 6Aq |
| 16 | | 4A |
| 238600 | | Dc |
| + 504360 | | |
| -3456 | | --B3Aq |
| --864 | | --B3A |
| --72 | | --B |
| — 254312 | | |
| + 150048 | | *Divisor.* |
| 1792 | | 4AcE |
| 4704 | | 6AqEq |
| 5488 | | 4AEc |
| 2401 | | Eqq |
| 1670200 | | DcE |
| + 3989881 | | |
| --24192 | | -B3AqE |
| --42336 | | -B3AEq |
| --24696 | | -BEc |
| —2867256 | | |
| 1122625 | | *Ablatit.* |
| R 107190 | 7056 | |
| 17698 | 808 | *Divisor.* |
| 107190 | 7056 | *Ablatit.* |

## Exemplum XV. Trisectionis.

3l—1c=1|258640782100. CqL—Lc=Dc.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 258 | 640 | 782 | 1 (0 | 4499 *Radix minor.* Subtensa Gr. 26. |
| 3 | | 3Cq | | | |
| | --64 | -Ac | | | |
| + 1 | 2 | CqA | | | |
| 1 | 136 | *Ablatit.* | | | |
| R | 122 | 640 | | | |
| | --4 | 8 | -3Aq | | |
| | -- | 12 | -3A | | |
| | --4 | 92 | | | |
| | +3 | | Cq | | |
| | 25 | 08 | *Divisor.* | | |
| | --19 | 2 | -3AqE | | |
| | —1 | 92 | -3AEq | | |
| | | --64 | Ec | | |
| | --21 | 184 | | | |
| + | 12 | | CqE | | |
| | 98 | 816 | *Ablatit.* | | |
| R | 23 | 824 | 782 | | |
| | 2 | 417 | 88 | *Divisor.* | |
| | 21 | 665 | 151 | *Ablatit.* | |
| R | 2 | 159 | 631 | 100 | |
| | | 239 | 506 | 23 | *Divisor.* |
| | 2 | 154 | 585 | 501 | *Ablatit.* |
| R | | 05 | 045 | 599 | 000 |

Exempl.

Exemplum XVI. Quinquisectionis.

$1qc-5c+5l=1|14715287270209 2$

$Lqc-CqLc+FqqL=Gqc.$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 14715 | 28727 | 02092 |
| + | | 5 | Fqq | |
| | | --5 | --Cq | |
| | | 32 | Aqc | |
| | 10 | | FqqA | |
| + | 100032 | | | |
| | | --40 | CqAc | |
| | | 96032 | *Ablatit.* | |
| R | | 18683 | 28727 | |
| | | 80 | | 5Aqq |
| | | | 80 | 10Ac |
| | | | 40 | 10Aq |
| | | | 10 | 5A |
| | | 5 | | Fqq |
| | | +5008 | 8410 | |
| | | --60 | | -Cq3Aq |
| | | --30 | | -Cq3A |
| | | | --5 | -Cq |
| | | —630 | 5 | |
| | | +4378 | 3410 | *Divisor.* |
| | | 32 | 0 | 5AqqE |
| | | 12 | 80 | 10AcEq |
| | | 2 | 560 | 10AqEc |
| | | | 2560 | 5AEqq |
| | | | 1024 | Eqc |
| | | 20 | | FqqE |
| + | | 20047 | 62624 | |

(0|2437
Subtensa
*Gr.* 14.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | --240 | | -Cq3Aq | E |
| | --480 | | -Cq3AE | q |
| | --320 | | -CqEc | |
| | --29120 | | | |
| | 17135 | 62624 | *Ablatit.* | |
| R | 1547 | 66103 | 02092 | |
| | 4149122 | | | *Divisor.* |
| | 1242 | 64912 | 09443 | *Ablatit.* |
| R | 305 | 01190 | 92649 | 90000 |

## *Notæ in Exempla precedentia.*

IN Exemplis Sectionum 26 & 28, Numerum Justum voco eum, qui oritur ex applicatione potestatis Resolvendæ ad gradum lateris suppositi, per quem facta est Depressio. Hæc enim mensura est, cui reliquæ species omnes legitimè aggregatæ, deberent esse æquales. Ut in Exemplo 1° Sectionis 26, 1c+238|6.—7|2q =L) 872|5. Si pro latere primo supponantur 5: Oportet esse C: 5: +238|6—7|2Q: 5: = 8725 diviso per 5: hoc est 125 + 238|6—(7|2x25) 180, nempe 183|6 æqualem esse 174|5 Justo. At major est: ideoque latus verum minus est quàm 5. Supponatur igitur iterum 4; Et periculum fac, an C: 4: +238|6—7|2Q: 4: æquetur 872|5 diviso per 4.

Cæte-

Cæterùm nè in his Exemplis, ſicut etiam in ſequentibus, tentamenta hæc caſu merè fortuito ſuſcipiantur; Monendum erit,

Primò, Si lateris eruti homogenea poteſtas excedat poteſtatem Reſolvendam; vel, ſi magnitudines augentes poteſtatem Reſolvendam, excedant eas quæ imminuunt: Latus A verum minus (ut plurimum) erit latere eruto: Sin aliter, majus. Ut in hac Æquatione, $1c^+2600001=1809321713$.

Secundò, Si Diviſores ſub eodem ſigno cum Reliquo poteſtatis Reſolvendæ, excedant eos, qui ſunt ſub ſigno diverſo: Latus E verum (ut plurimum) minus erit quam Quotus: ſin aliter, majus: Ut in hac Æquatione, $15681 - 1c = 21952$. Idem etiam accidit in Æquationibus ambiguis, quando Reliquum poteſtatis Reſolvendæ eſt affirmativum: ut in hac Æquatione, $67681 - 1c = 214273$. Harum trium Æquationum ſolutio in praxi, poſt Notas oſtendetur.

Tertiò, Si poſt hæc Monita, nihilominùs ſubſit dubitatio; tentamentum à 5 commodiſſimè erit inchoandum: Atque inde per numeros impares continuanda inquiſitio: ſive ea per Depreſſionē fiat, ſive per Logarithmos.

His præmonitis, reſtat ut Exempla ipſa diſcutiamus.

Ad Exempl. I. $\sqrt{qc1703}$ eſt $4^+$, per Sect. 18, Reg. 1. Nam ut ex Sect. 7. apparet, per Coëfficientes Analyticè reductos, non fit in primo

primo puncto notabilis immutatio. Quare latus A verum erit 4.

Latus E verum minus est quàm Quotus 9: quia Divisores sub signo + (quod signum est ipsius Residui) excedunt eos qui sunt sub signo —.

Ad Exempl. II. 42) 247 (6 —, per Sect. 18, Reg. 2. Nam 42 Analyticè reductus, per Sect. 6 & 8, fit 252: major quàm 247. Estque Latus A verum minus quàm 6; quia C: 6—: excedit 247|6.

Ad Exempl. III. 10) 247 (24+=Q: 5—: per Sect. 18, Reg. 2. At 10 Q: 5: = 250 24=7|6. Monit. 1.

Ad Exempl. IV. √c44|3 est 3+, per Sect. 18, Reg. 3. Quare latus A verum est 3.

Latus E verum minus est quàm Quotus 8—, per Monit. 2.

Ad Exempl. V. √q12|4 est 3+, per Sect. 18, Reg. 3. Quare latus A verum est 3.

Latus E verum minus est quàm Quotus 9-, per Monit. 2.

Ad Exempl. VI. Coëfficiens lateralis 3|4 Quadrato-quadraticè multiplicatus, & auctus 6|2, fit 140, QQ: 3+: per Sect. 18, Reg. 4. Quare latus A verum est 3.

Latus E verum minus est quam Quotus 9—, per Monit. 2.

Ad Exempl. VII, √c77 est 4, per Sect. 18, Reg. 3. Quare latus A verum est 4.

Ad Exempl. VIII. √q32 est 5|f5, in 32, fit

180|8 mi 46|5, reſtat 134, C: 5: per Sect. 18. Reg. 4. At 134 excedit 46|5. Quare latus A verum minus eſt quàm 5, per Monit. 1.

Latus E verum minus eſt quam Quotus 10, per Monit. 2.

Ad Exempl. IX, XI, XIII. Solutio facillima eſt per Diviſionem, juxta Sect. 18, Reg. 3.

Ad Exempl. X. C: 5: eſt 125, mi 13, reſtat 112, C: 5—: per Sect. 18, Reg. 4. At 112 excedit 13. Quare latus A verum minus eſt quam 5, per Monit. 1.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 12, per Monit. 2.

Ad Exempl. XII. √96 eſt 2+, in 6 fit 12, mi 1, reſtat 11, C: 2|5 per Sect. 18, Reg. 4. At 11 excedit 1. Quare latus A verum paulò minus quam 2+, per Monit. 1.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 5, per Monit. 2.

Ad Exempl. XIV. QQ: 7|2: eſt —2687. Et √c238|6 eſt 6|2, cujus QQ eſt + 1480. Tum —2687+1480=—1207: Hic additus ad 872, dat 2079, QQ: 6+: per Sect. 18, Reg. 4. Et quia adjectitius —2687 major eſt quam ablatitius + 1480, erit latus A verum minus quàm 6, per Monit. 1.

Latus E verum minus eſt quam Quotus 9, per Monit. 2.

Ad Exempl. XV, XVI. Quia, in utroque, Æquationis ambiguæ Radix minor quæritur, nec obſtant Coefficientes etiam reducti, Analyſis, per Diviſionem fiet, juxta Sect. 18. Reg. 1.

Praxis

Praxis Exempli in Monito primo.

$$1c^{+}26\underline{|0000} = 180\dot{9}3\dot{1}71\dot{3}.$$

$$18\dot{0}\underline{|9}\ (4, \text{ latus A}$$

$$26\underline{|0}\ \text{Cq.}$$

√q26 est 5, in 26 fit 130, tollatur ex 180, restat 50, C: 3+: qui minor est quam 180. Quare latus A verum majus est quàm 3.

Praxis Exempli in Monito secundo.

$$15\dot{6}\dot{8}l - 1c = 2\dot{1}95\dot{2}$$

| | | |
|---|---|---|
| $2\dot{1}$ | $95\dot{2}$ | ( 28, Duo prima latera. |
| 15 | 68 | Cq |
| -- 8 | | -Ac |
| +31 | 36 | CqA |
| +23 | 36 | *Ablatit.* |
| R -1 | $40\dot{8}$ | |
| 1 | 2 | -3 Aq |
| | 6 | -3 A |
| -1 | 26 | |
| +1 | 568 | Cq |
| + | 308 | *Divisor.* |

Signum R est -. At - 1|26 minor est quam +1|568. Quare latus E verum majus est quam Quotus 4.

Praxis Exempli posterioris in Monito secundo.

$$67681\text{-}1c = 214273$$

| | | |
|---|---|---|
| 214 | 273 | (47, Duo prima latera |
| 67 | 68 | Cq |
| -64 | | -Ac |
| +270 | 72 | CqA |
| +206 | 72 | *Ablatit.* |
| R +7 | 553 | — |
| -4 | 8 | -3Aq |
| -- | 12 | -3A |
| --4 | 92 | |
| +6 | 768 | Cq |
| +1 | 848 | *Divisor.* |

Signum R est +. At Divisor ex A lateris gradibus negativus, minor est Divisore Coëfficiente affirmativo; hoc est --4|92 minor est quam +6|768. Quare latus E verum majus erit quam Quotus 4.

*De Logarithmis.*

In Sectione XXVII. Logarithmorum doctrinam paucis tradidi: Sed satis luculenter præsertim pro tribus prioribus Numerationis speciebus, scilicet Additione, Subductione, & Multiplicatione.

Operatio quidem in Addendo & Subtrahendo, si Indices sint affirmativi, à communi integro-

grorum viâ nihil differt: parum etiam si sint negativi, ut ex his Exemplis apparet,

| | | | |
|---|---|---|---|
| Inventio fractionum | 13. 1,11394. | Et | 15. 1,17609 |
| | 17. 1,23045. | | 32. 1,50515 |
| | Log. $\bar{1}$,88349 | | Log. $\bar{1}$,67094 |

| Additio. | | Subductio. | |
|---|---|---|---|
| Ad | $\bar{1}$,88349 | Ex | $\bar{1}$,88349 |
| adde | $\bar{1}$,67094 | tolle | $\bar{1}$,67094 |
| Sum | $\bar{1}$,55443 | Rest | 0,21255 |

Multiplicatio.

| | |
|---|---|
| Lateris $0\overline{0064}$ | Lateris $0\overline{0064}$ |
| $3\times\bar{3},80614$ | $2\times\bar{3},80614$ |
| Cubus $\bar{7},41842$ | Quadr. $\bar{5},61228$ |

Divisionis Logarithmi Indicem habentis negativum, per 2, 3, 4, 5, &c. difficultas constat in investigatione Indicis Quoti. Cui rei hæc inservit Tabella.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Divisores. | 2) | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | | | | | | | $\bar{1}$ |
| | | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | | | | | | | $\bar{2}$ |
| | | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | | | | | | | $\bar{3}$ |
| | | $\bar{7}$ | $\bar{8}$ | | | | | | | 4 |
| | 3) | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | | | | | | $\bar{1}$ |
| | | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | | | | | | $\bar{2}$ |
| &c | | $\bar{7}$ | $\bar{8}$ | $\bar{9}$ | | | | | | $\bar{3}$ |
| | 4) | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | | | | | 1 |
| | | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{7}$ | $\bar{8}$ | | | | | $\bar{2}$ |
| | 5) | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | | | | $\bar{1}$ |
| | | $\bar{6}$ | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | 2 |
| | | 40. | 30. | 20. | 10. | 0 | | | | |

In hac Tabella Diviſores ſunt à ſiniſtrâ intra lineam flexam.

Tum verſus dextram ſequuntur Logarithmorum dividendorum Indices negativi.

His in ſingulis ordinibus collaterales adſtant Quotorum Indices etiam negativi.

Subtus autem qui ſcribuntur numeri, 0, 10, 20, 30, 40, Oſtendunt numeros addendos primæ figuræ Logarithmi dividendi, cujus Index negativus invenitur ſupra in eâdem columnâ, juxta Diviſorem. Ut ſi Logarithmus $\bar{7},41842$ poſtuletur dividi per 3 : Quæratur $\bar{7}$ juxta 3) dabiturque collateralis $\bar{3}$, pro Indice Quoti: Et numerus 20 ſubtùs; qui additus figuræ dividuæ primæ 4, reddit ipſum 24 : in quo Diviſor 3 octiès continetur.

Diviſio.

| | |
|---|---|
| 3) $\bar{7},41842$ | 2) $\bar{5},61228$ |
| Latus $\bar{3},80614$ | Latus, $\bar{3},80614$ |

BRITISH 11 OC 71 MUSEUM

*FINIS.*